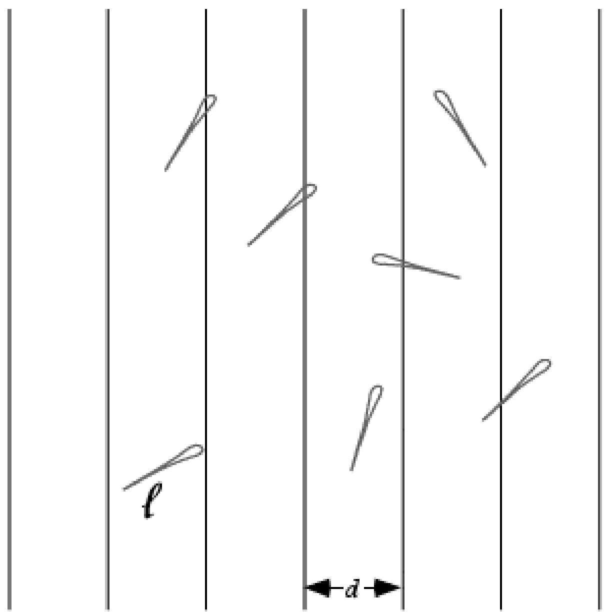
Universidad
Nacional de
Educación a
Distancia

SIMULACIÓN

Solución a una Selección de Problemas

Curso 2008-09



Alfonso Urquía Moraleda
Departamento de Informática y Automática
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática, UNED
Juan del Rosal 16, 28040 Madrid, España
E-mail: aurquia@dia.uned.es

Índice

Parte I

Introducción al modelado y la simulación

Tema 1

Conceptos básicos del modelado y la simulación

Problema 1.1

Describa cuál sería en su opinión la forma más eficaz de estudiar cada uno de los sistemas siguientes, en términos de las posibilidades mostradas en la Figura 1.1.

1. *Un ecosistema compuesto por varias especies animales y vegetales, y por recursos (agua, luz, etc.).*
2. *Una glorieta en la que convergen varias calles, y que frecuentemente presenta atascos.*
3. *Una presa para el suministro de agua y electricidad, que se planea construir en un río.*
4. *El servicio de urgencias de un hospital, que se encuentra en funcionamiento.*
5. *Un servicio de entrega de pizzas a domicilio.*
6. *Una determinada secuencia de pasos en el proceso de fabricación de circuitos integrados, en una fábrica que se encuentra en funcionamiento.*
7. *El funcionamiento de un autobús, que conecta el punto de devolución de vehículos, de una compañía de alquiler de coches, con el aeropuerto.*
8. *Un circuito eléctrico.*

SOLUCIÓN

El estudio de *ecosistemas* mediante experimentación con el sistema real es una tarea delicada, ya que suele ser difícil manipular las variables cuyo efecto se desea estudiar. También es complicado evaluar en qué medida la variación incontrolada de otras variables no manipulables, y que posiblemente ni tan siquiera pueden medirse, afecta a la respuesta.

Se han desarrollado modelos matemáticos de ecosistemas, en particular de la dinámica de poblaciones, para estudiar la relación depredador-presa entre distintas especies, y su competición por los recursos naturales. Pueden encontrarse algunos ejemplos sencillos de modelos de dinámica de poblaciones en el texto (Cellier 1991).

A medida que los sistemas a estudiar se hacen más complejos, existe menos conocimiento acerca de los fundamentos físicos de funcionamiento del sistema, con lo cual los modelos matemáticos basados en leyes físicas se hacen cada vez menos precisos. Por ello, los modelos matemáticos de sistemas biológicos (y también de sistemas económicos) no se basan en la comprensión de las leyes físicas que rigen el sistema, sino en el ajuste de modelos a los datos medidos del sistema. Este tipo de modelado, basado en la observación del sistema real, y el ajuste del modelo a los datos, se denomina *modelado inductivo*. La estructura del modelo y el valor de los parámetros de los modelos inductivos no están basados en la intuición física, sino en la observación del sistema real.

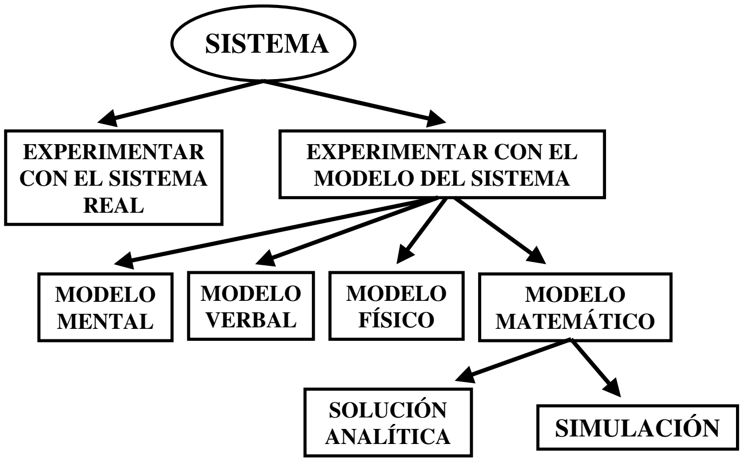


Figura 1.1: Formas de estudiar un sistema.

El planteamiento es diferente cuando se pretenden estudiar sistemas eléctricos, mecánicos, hidráulicos, etc., tales como una *presa* o un *circuito eléctrico*. En estos caso, los fundamentos teóricos del comportamiento físico del sistema son bien conocidos, y pueden aplicarse para establecer la estructura matemática del modelo y el valor de sus parámetros. El gran conocimiento existente acerca del comportamiento de los circuitos eléctricos permite emplear modelos matemáticos para realizar el diseño de circuitos, puesto que el modelo reproduce de manera muy precisa el comportamiento del sistema real. Esto también es cierto en el caso de los sistemas mecánicos (excepto cuando las nolinealidades y la fricción son factores dominantes[1]).

Sin embargo, este no es el caso de los sistemas químicos: existen muchos factores relevantes que influyen sobre una reacción química, por tanto no es posible definir modelos que sean válidos para un amplio espectro de experimentos. Frecuentemente existen diferencias significativas entre el comportamiento real del proceso químico y el comportamiento predicho por un modelo construido únicamente a partir de consideraciones teóricas. Por ello, la forma de llevar a cabo el modelado de estos sistemas es definir la estructura matemática del modelo a partir de consideraciones teóricas, y ajustar los parámetros del modelo a partir de medidas experimentales del sistema real. Cuando el objetivo del modelo es el diseño de un sistema que todavía no existe, es frecuente construir modelos físicos del sistema real (plantas piloto realizadas ”a escala” del sistema real) a partir de los cuales obtener las observaciones experimentales necesarias para ajustar el modelo.

El estudio de *sistema logísticos* (como es el caso de una *glorieta* en la que confluyen varias calles, los servicios de un *hospital* o de *reparto de pizzas*, una *línea de autobús*, etc.), se realiza comúnmente empleando modelos matemáticos, con independencia de que en el caso de algunos sistemas sencillos pueda experimentarse directamente con el sistema real. La metodología seguida en el modelado de sistemas logísticos consiste en definir la estructura del modelo a partir del conocimiento teórico que se tiene sobre el sistema. Las distribuciones de probabilidad de los parámetros y de las entradas al modelo son estimadas a partir de datos medidos del sistema real. Cuando estos datos no se encuentran disponibles, bien porque el sistema todavía no existe, o porque no es posible medirlos (posiblemente por razones de coste), entonces el modelo se realiza completamente sobre la base de consideraciones teóricas.

El empleo de modelo matemáticos tiene también aplicaciones importantes en entornos de producción de elevada complejidad, como es la *fabricación de circuitos integrados*. Existen simuladores de los procesos de fabricación de los dispositivos semiconductores (implantación

[1]Ver el texto (Cellier 1991).

de dopantes, difusión, oxidación, etc.) que trabajan en conexión con simuladores que predicen el comportamiento eléctrico del dispositivo así fabricado. El empleo de estos simuladores tiene un gran impacto económico. Las orientaciones obtenidas del estudio de simulación permiten simplificar el diseño experimental a realizar sobre el sistema real, reduciendo considerablemente los costes de experimentación y el tiempo necesario para llevar a cabo el experimento. La experimentación sobre el sistema real se lleva a cabo empleando las técnicas estadísticas de diseño de experimentos que se discutirán en el Tema 13.

Problema 1.2

Para cada uno de los sistemas mencionados en el problema anterior, suponga que se ha decidido realizar el estudio mediante simulación. Discuta si la simulación debería ser estática o dinámica, determinista o estocástica, y continua o discreta.

SOLUCIÓN

El tipo de modelo matemático depende del propósito del estudio, y no de la naturaleza en sí del sistema que se pretende estudiar. Una vez dicho esto, a continuación se discuten los tipos de modelos matemáticos que más frecuentemente se realizan de los sistemas indicados, si bien es fácil imaginar estudios que requieren de otro tipo diferente de modelo.

Los modelos matemáticos de circuitos eléctricos y mecánicos comúnmente son modelos dinámicos, deterministas y continuos. Suelen ser modelos descritos mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir, ecuaciones en las cuales aparecen derivadas respecto al tiempo, pero no respecto a las coordenadas espaciales.

Para calcular la distribución de la presión en la pared de una presa, o hacer estudios de estrés en materiales, comúnmente se emplean modelos estáticos, deterministas y continuos. En este caso, en las ecuaciones no interviene la derivada respecto al tiempo, ya que el tiempo no juega un papel relevante, sino que intervienen derivadas respecto a las coordenadas espaciales. Es decir, el modelo contendría ecuaciones en derivadas parciales.

Por otra parte, si el aspecto bajo estudio en la presa es la conversión de la energía de la caída de agua en electricidad, podría ser adecuado emplear un modelo dinámico, determinista y continuo. En este caso, el modelo contendría fundamentalmente ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir, el aspecto bajo estudio es la evolución de las variables del sistema con el tiempo, y no su dependencia respecto a las coordenadas espaciales.

Los modelos empleados en la industria microelectrónica para simular el proceso de fabricación y el comportamiento eléctrico del dispositivo son deterministas, continuos y dinámicos. En este caso, interesa estudiar la variación de las variables con la posición espacial y con el tiempo, con lo cual el modelo contiene ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Un ejemplo sería el modelo de la difusión de un dopante en silicio, que tendría que describir la concentración del dopante en función del tiempo y de la coordenada espacial.

Para el estudio de procesos logísticos de fabricación y de servicios suelen emplearse modelos dinámicos, estocásticos y discretos. Se trata de sistemas en los que el valor de las variables evoluciona dando "saltos" en determinados instantes de tiempo, en lugar de modificarse en manera continua en función del tiempo. Asimismo, son sistemas en los cuales existe incertidumbre acerca del valor de determinadas variables de entrada al modelo. Por ello, el valor de cada una de estas variables no se modela mediante un número, sino mediante una distribución de probabilidad.

Al realizar la simulación del modelo, se emplea la distribución de probabilidad para obtener el valor numérico de la variable, con la particularidad de que si se repite varias veces la simulación, el valor numérico obtenido de la distribución podrá ser diferente en cada caso. Esto hace que los resultados obtenidos de la simulación de un modelo estocástico sean diferentes de una simulación a otra. No basta, por tanto, con realizar una única simulación del modelo, sino que debe realizarse un número de réplicas independientes de la simulación suficiente como para poder extraer conclusiones estadísticas acerca de las respuestas.

Problema 1.3

Sugiera al menos dos estudios de simulación en el ámbito de la fabricación/manufactura, y otro en el ámbito de los servicios (por ejemplo, servicios de salud, bomberos, etc.). Justifique el uso de simulación, en oposición al empleo de modelos analíticos. ¿Qué aspectos del análisis mediante simulación son particularmente ventajosos para la aplicación seleccionada?

SOLUCIÓN

Existen muchos ejemplos de procesos logísticos de fabricación y servicios: cadenas de montaje de maquinaria, líneas de fabricación, establecimientos abiertos al público (tiendas, bancos, supermercados, restaurantes, hospitales, cines, bibliotecas, etc.), sistemas de almacenamiento (parkings, almacenes cuyo inventario es preciso gestionar, etc.), servicios (líneas de autobús, servicios de ambulancias, bomberos, policía, etc.), etc.

Los posibles tipos de estudios a realizar son muy variados: diseño de procesos, evaluación de determinadas configuraciones alternativas a un proceso ya existente, búsqueda de la configuración que optimiza determinada respuesta del proceso, etc.

Existen modelos matemáticos analíticos para algunos sistemas sencillos. Sin embargo, el análisis de procesos complejos únicamente puede llevarse a cabo mediante el empleo de modelos de simulación. Dos razones para ello son las siguientes:

- En los modelos de simulación los modelos se describen de manera algorítmica, en oposición a las expresiones matemáticas empleadas en los modelos analíticos. Esto hace que sea mucho más flexible y sencilla la construcción de modelos de simulación.
- Los modelos de simulación permiten que las variables aleatorias de entrada vengan descritas mediante cualquier distribución de probabilidad, y permiten que la estructura del sistema sea arbitrariamente compleja. Por el contrario, únicamente se han desarrollado modelos matemáticos analíticos para un determinado conjunto de distribuciones de probabilidad de entrada, y determinados sistemas sencillos.

A la vista de las ventajas que presentan los modelos de simulación frente a los modelos analíticos, cabría plantearse cuál es la utilidad en nuestros días de los modelos analíticos. Una posible respuesta es que el empleo de modelos analíticos es una actividad complementaria al empleo de modelos de simulación. Como se discutirá en el Tema 7, los modelos analíticos juegan un papel importante en la validación de los modelos de simulación.

Tema 2

Pasos en un estudio de simulación

Problema 2.1

Plantee un posible estudio de simulación del sistema siguiente: una gasolinera, con varios surtidores, atendida por varios empleados. En particular, responda a las cuestiones siguientes:

- *¿Cuáles son las preguntas a responder?*
- *¿Qué recursos prevé que necesitaría para llevar a cabo el estudio? Sugiera un método adecuado de recogida de datos experimentales, justifíquelo y describa cómo lo ejecutaría.*
- *¿Qué medidas del comportamiento del sistema son de interés?*
- *¿Qué aspectos de la realidad constituyen el sistema bajo estudio?*
- *¿Cuáles son las variables de entrada del modelo? ¿De qué tipo es cada una: aleatoria o determinista?*
- *Describa las hipótesis de modelado.*
- *Realice un diseño preliminar del experimento.*

SOLUCIÓN

Puesto que se trata de plantear un hipotético estudio de simulación, existen múltiples formas de contestar a este problema. A continuación se explica una de ellas.

Preguntas a responder

Se va a realizar la ampliación de una gasolinera, que se encuentra excesivamente congestionada, con el fin de mejorar la calidad del servicio. El objetivo del estudio es decidir cuántos nuevos surtidores deben añadirse, qué tipos de combustible deben dispensar, y decidir si deben añadirse nuevas cajas de cobro. Asimismo, debe estimarse en qué medida varía el funcionamiento del sistema en función de emplear una o otra de las dos siguientes alternativas:

- Los clientes se sirven la gasolina ellos mismos, con lo cual deben acudir a pagar a la zona de tienda/cajas.
- Las operaciones de repostaje, así como el cobro en metálico a pie de surtidor, es realizado por el personal de la gasolinera. Para realizar el pago con tarjeta, el cliente debe acudir a la zona de tienda/cajas.

La medida fundamental para evaluar la calidad del servicio es el tiempo de espera del cliente. Éste se calcula como la suma del tiempo en cola del surtidor más el tiempo de espera en la cola de la caja.

Otra medida de la calidad del servicio es el número de clientes por hora que abandonan la gasolinera sin ser atendidos. Con ello se cuantifica en qué medida el elevado número de vehículos en cola de los surtidores hace desistir a otros nuevos clientes de ponerse a la cola, con lo cual se marchan de la gasolinera sin ser atendidos. Esto supone un doble perjuicio económico: la propia pérdida de negocio, más el negocio que se proporciona a la competencia. Una forma de modelar este fenómeno es asignar un tamaño máximo a la cola de cada surtidor. Mientras la cola tenga ese tamaño máximo, no pueden añadirse nuevos vehículos a la misma.

Recursos para realizar el estudio. Recogida de datos experimentales

El coste de realización del modelo depende en gran medida del esfuerzo que requiera la recogida de los datos experimentales. Antes de plantearse la realización de medidas, es preciso analizar toda la información ya disponible acerca del funcionamiento de la gasolinera. Es posible que el sistema informático de la misma registre las operaciones realizadas sobre cada surtidor (qué producto se ha dispensado y por valor de qué importe, la hora y duración del servicio, etc.) y se pueda disponer de esos datos a lo largo de cierto periodo de tiempo (por ejemplo, los últimos tres meses).

Para realizar la simulación será necesario disponer de un ordenador y del software de simulación adecuado.

Medidas de interés para el estudio

Para poder responder a las preguntas planteadas anteriormente, es preciso estimar la densidad de probabilidad, la media y la varianza de las observaciones (obtenidas mediante simulación) de:

- El tiempo de espera en cola de cada surtidor y el número de clientes en la cola.
- El tiempo de espera en cola del surtidor para cada tipo de combustible.
- El tiempo de espera en la cola de las cajas y el número de clientes en dicha cola (se forma una única cola para todas las cajas).
- La *utilización* de cada surtidor durante cada hora del dia, es decir, la proporción del tiempo que se encuentra ocupado en cada hora.
- El volumen por hora de cada tipo de combustible extraído de cada surtidor.
- La *utilización* de cada caja en cada hora del dia.
- El tiempo de espera en cola de las cajas y el número de clientes en la cola.
- El número de clientes por hora que abandonan la gasolinera, una vez han sido atendidos.
- El número de clientes por hora que abandonan la gasolinera sin ser atendidos.

Aspectos de la realidad que constituyen el sistema bajo estudio

El sistema bajo estudio está compuesto por los surtidores, el tránsito de los surtidores a la zona de tienda/cajas, la tienda y las cajas.

Variables de entrada del modelo

Las variables de entrada aleatorias son:

- El intervalo de tiempo entre llegadas sucesivas de clientes (uno por vehículo) a la gasolinera.
- El tipo de combustible que debe repostar cada cliente que llega a la gasolinera.
- El tiempo que tarda cada vehículo en repostar. Este tiempo está distribuido de forma diferente si el repostaje es realizado por el cliente o por un empleado de la gasolinera.
- El tiempo de "tránsito"del cliente entre el surtidor y la zona de tienda/cajas. Se supone que un determinado cliente tarda lo mismo en ir desde el surtidor a la zona de tienda/cajas que en regresar desde ésta al surtidor.

- Si el cliente desea realizar el pago en metálico o con tarjeta.
- Si el cliente desea o no realizar compras en la tienda.
- El tiempo que tarda el cliente en seleccionar los artículos que desea comprar en la tienda (en caso de que desee hacerlo).
- El tiempo necesario para cobrar a cada cliente, tanto la gasolina como aquellos artículos de la tienda que desee adquirir. Este tiempo depende de si el cliente ha comprado o no artículos en la tienda y también de la forma de pago: en metálico o con tarjeta.

Las variables de entrada deterministas, que en este caso son también los factores experimentales, son las siguientes:

- El número de surtidores y los tipos de combustible que dispensa cada uno de ellos.
- El número de cajas de cobro.
- El procedimiento de funcionamiento: autoservicio o repostaje realizado por empleados.

Hipótesis de modelado

Se realiza la hipótesis de que el sistema funciona de la forma descrita a continuación.

Cada cliente llega a la gasolinera demandando un determinado tipo de combustible. Si las colas de los surtidores que dispensan ese tipo de combustible han alcanzado su tamaño máximo, entonces el cliente abandona inmediatamente la gasolinera sin ser atendido. En caso contrario, se pone a la cola del surtidor (de entre aquellos que sirven el tipo de combustible que necesita) en el que hay menos vehículos en cola y espera hasta que llegue su turno.

Si la gasolinera funciona en régimen de autoservicio, el cliente se sirve la gasolina y a continuación se dirige a la zona de tienda/cajas. Tarda un cierto tiempo en recorrer la distancia que separa los surtidores de la zona de tienda/cajas. Una vez en esta zona, si desea realizar alguna compra en la tienda, la hace (lo cual le lleva un cierto tiempo) y a continuación se dirige a la caja. Si no desea realizar compras, se dirige directamente a la caja. Una vez ha pagado, vuelve a la zona de surtidores y abandona la gasolinera.

Si la gasolinera no funciona en régimen de autoservicio, son los empleados quienes dispensan la gasolina. En general, el empleado realiza el repostaje más rápido que si es el propio cliente quien debe hacerlo. Se supone que una vez el cliente ha accedido al surtidor, el empleado está listo para atenderle inmediatamente. Si el cliente desea pagar el metálico y además no quiere comprar en la tienda, entonces el mismo empleado que le ha servido la gasolina es quien le cobra, tras lo cual el cliente abandona la gasolinera.

En caso contrario, es decir, si el cliente desea pagar con tarjeta, o si desea hacer compras en la tienda (con independencia de la forma de pago: metálico o tarjeta), entonces, una vez realizado el repostaje, se dirige a la zona de tienda/cajas, realiza las compras (si así lo desea) y paga, vuelve a la zona de surtidores y abandona la gasolinera.

Además de las hipótesis anteriores, acerca del funcionamiento del sistema, deben realizarse otras hipótesis de modelado acerca de la distribución de probabilidad de las entradas aleatorias del modelo.

Así, por ejemplo, puede considerarse que la frecuencia de llegada de clientes depende de la hora del día. Una aproximación sería considerar tres distribuciones diferentes de probabilidad del tiempo transcurrido entre llegadas sucesivas de clientes: la distribución correspondiente a la "alta" afluencia de clientes, la correspondiente a la afluencia "media" y la correspondiente a la "baja". Debe entonces definirse en qué periodos del día debe aplicarse cada una de estas tres distribuciones para simular el proceso de llegada de clientes.

Asimismo, deben modelarse los tiempos de proceso: repostaje mediante autoservicio, repostaje realizado por un empleado, cobro en metálico a pie de surtidor, cobro en la caja con tarjeta, en metálico, cobro de sólo la gasolina o de la gasolina más determinado número de artículos de la tienda. También debe modelarse el tiempo de tránsito de la zona de surtidores a la zona de tienda/cajas.

Diseño experimental preliminar

Un primer diseño experimental puede tener los siguientes tres factores experimentales:

- El número de surtidores. Este factor puede tener los dos siguientes niveles:
  - Los surtidores de los que actualmente dispone la gasolinera.
  - Los surtidores anteriores más uno, que dispensa todos los tipos de combustible.
- El número de cajas de cobro. Este factor puede tener los dos siguientes niveles:
  - El número de cajas que actualmente tiene la gasolinera.
  - El número actual de cajas más una.
- El procedimiento de funcionamiento. Este factor tiene dos niveles:
  - "autoservicio".
  - "repostaje asistido por empleados".

La matriz del experimento podría ser la siguiente (como se verá en el Tema 13, se trata de un diseño experimental 2^3 factorial completo):

Surtidores	**Cajas**	**Funcionamiento**
actual	actual	autoservicio
actual	actual	asistido
actual	actual+1	autoservicio
actual	actual+1	asistido
actual+1	actual	autoservicio
actual+1	actual	asistido
actual+1	actual+1	autoservicio
actual+1	actual+1	asistido

Para cada una de estas 8 configuraciones experimentales, se realizan N réplicas independientes de la simulación (por ejemplo, N=100). Cada una de estas réplicas podría consistir en simular el funcionamiento ininterrumpido de la gasolinera durante un periodo de M meses (por ejemplo, M=3). En el Tema 11 se explicará de qué forma escoger los valores de N y M para obtener un determinado nivel de confianza en los resultados.

Problema 2.2

Plantee un posible estudio de simulación del sistema siguiente: la intersección de varias calles, que se encuentra regulada por semáforos. Conteste a las cuestiones planteadas en el Problema 2.1.

Problema 2.3

Plantee un posible estudio de simulación del sistema siguiente: un servicio de ambulancias de un hospital. Conteste a las cuestiones planteadas en el Problema 2.1.

Parte II

Modelado y simulación

Tema 3

Método de Monte Carlo

Este tema NO SE EXIGIRÁ EN EL EXAMEN.

Como actividad complementaria al estudio de la asignatura, se propone únicamente la lectura del contenido del tema, por ello no se plantean ejercicios prácticos.

Tema 4

Modelado de sistemas de eventos discretos

Problema 4.1

Describa, empleando la metodología de la orientación a los eventos, el modelo que usted ha propuesto al contestar al Problema 2.1. En particular, responda a las cuestiones siguientes:

- *Cuáles son los eventos.*
- *Cuál es la condición de activación de cada evento.*
- *Cuáles son las acciones asociadas a cada evento.*
- *Indique cuáles son las condiciones inicial y final de la simulación.*

SOLUCIÓN

Existen diferentes formas de realizar un modelo de simulación orientado a los eventos del sistema descrito al resolver el Problema 2.1. A continuación se explica una de ellas.

Los tipos de eventos que componen el modelo son los siguientes:

1. Inicio de la simulación.
2. Llegada a la gasolinera de un nuevo cliente.
3. Un empleado termina de servir gasolina a un cliente.
4. Un empleado termina de cobrar a un cliente en el surtidor (no en una de las cajas).
5. El cliente termina de servirse la gasolina.
6. Llegada de un cliente a la zona de tienda/cajas.
7. Un cliente finaliza las compras en la tienda.
8. Un cliente termina el pago en una de las cajas.
9. Un cliente regresa al surtidor donde tiene estacionado su vehículo, una vez ha pagado en una de las cajas, con el fin de abandonar la gasolinera.
10. Final de la simulación.

Los tipos de evento número 3 y 4 de la lista anterior sólo se producirán si la gasolinera no funciona en régimen de autoservicio. Por el contrario, el tipo de evento número 5 sólo se producirá si la gasolinera funciona en régimen de autoservicio.

Los instantes de activación de cada tipo de evento se van almacenando durante la simulación en el *calendario de eventos*. Junto con el instante de activación y el tipo de evento a activar, debe almacenarse también a qué cliente aplica el evento. Una forma sencilla de hacer esto es ir numerando consecutivamente los clientes, según su orden de llegada a la gasolinera, y almacenar en el calendario de eventos a qué número de cliente aplica cada uno de los disparos de evento planificados en el calendario.

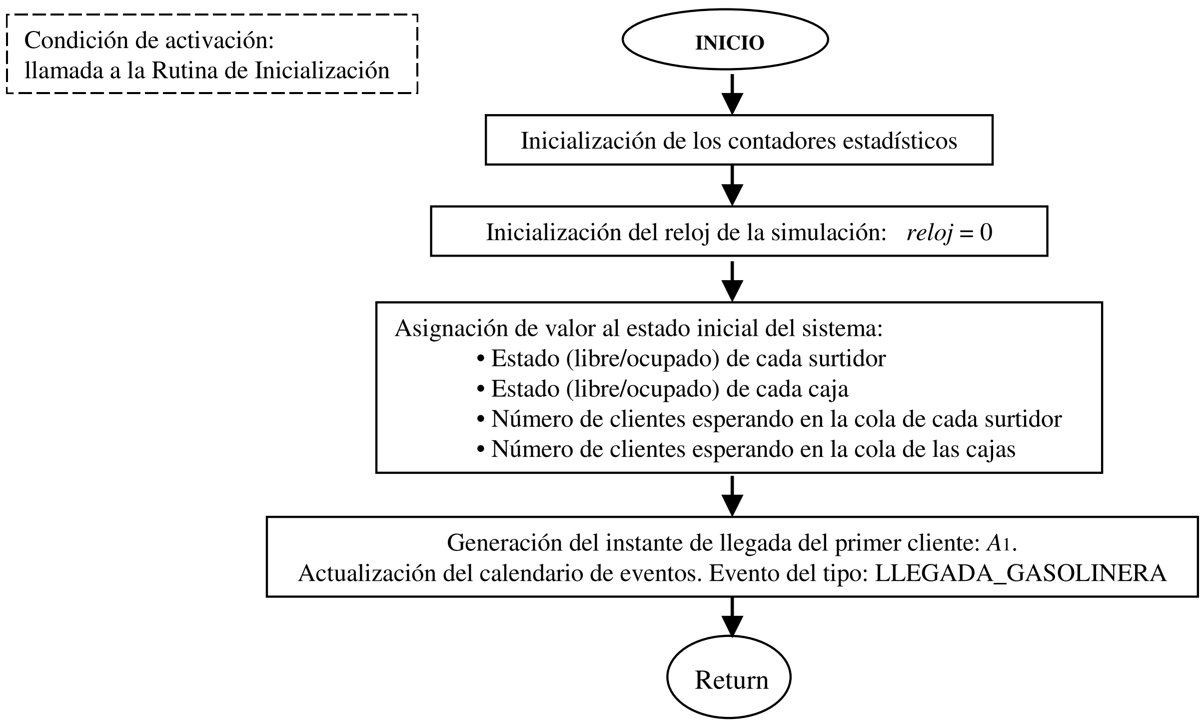


Figura 4.1: Flujo de acciones de la Rutina de Inicialización.

En las Figuras 4.1 a 4.10 se representan los flujos de acciones de las rutinas de eventos. Por motivos didácticos, la descripción de las acciones se ha realizado sin entrar en todos los detalles computacionales. En particular, no se indica cómo deben actualizarse los contadores estadísticos, ni cuáles son. Este asunto se explicará con detalle en el Tema 5.

En la Figura 4.1 se muestra el flujo de acciones de la *Rutina de Inicialización*, en la cual se asigna valor inicial al reloj de la simulación, a los contadores estadísticos y a las variables de estado del modelo. También se genera el instante de llegada a la gasolinera del primer cliente. Esta información se almacena en el *calendario de eventos*: en el instante A_1 se activa un evento del tipo LLEGADA_GASOLINERA, relativo al cliente número uno.

El evento "final de la simulación" se activa cuando el reloj de la simulación alcanza un determinado valor (ver la Figura 4.10). En el diseño experimental preliminar propuesto en la solución al Problema 2.1, la simulación termina cuando el reloj alcanza el valor M meses. Dadas las características del sistema, resulta adecuado medir el tiempo simulado en horas: se escoge la "hora" como unidad de la variable *reloj de la simulación*.

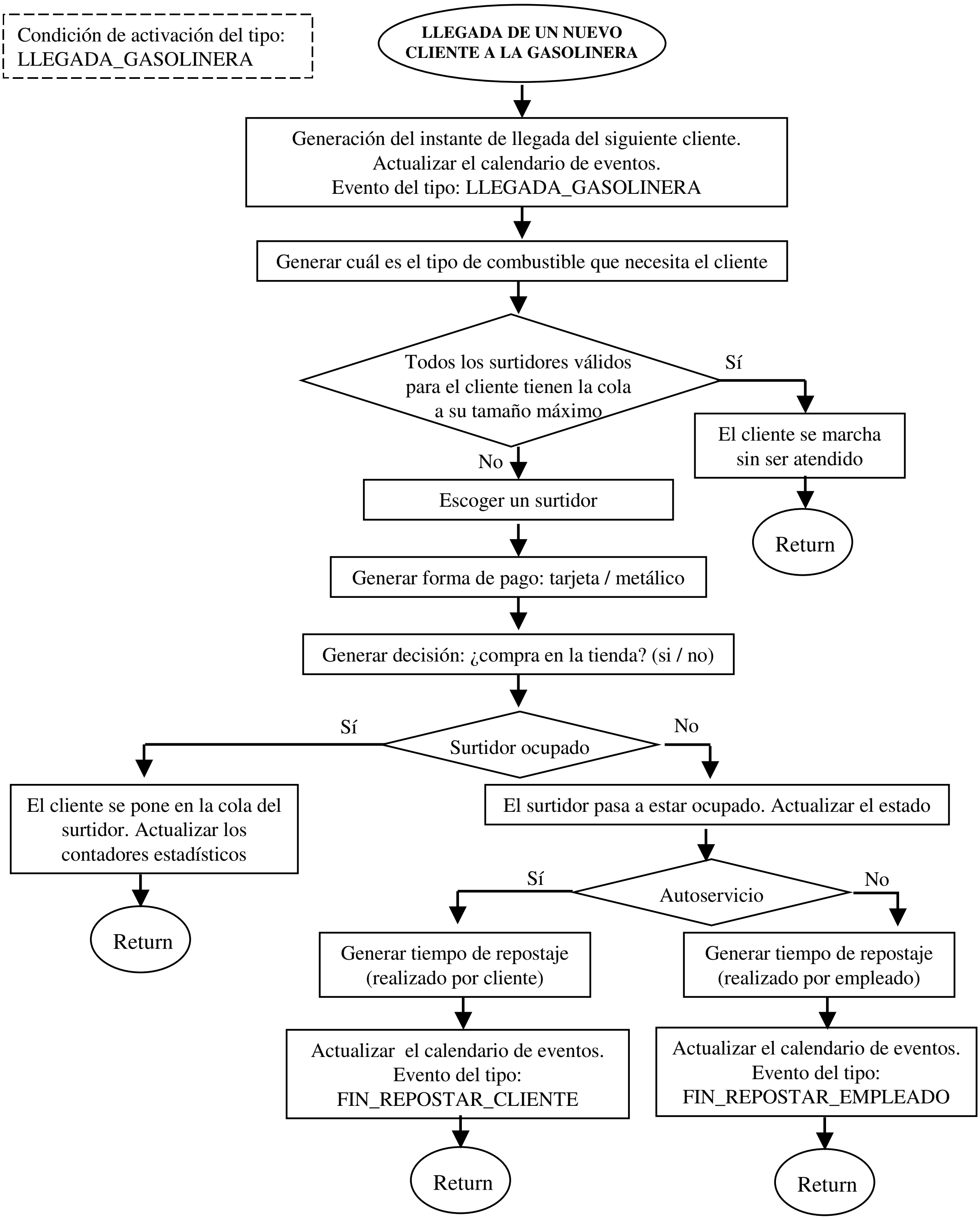


Figura 4.2: Flujo de acciones del evento "Llegada de un cliente a la gasolinera" (LLEGADA_GASOLINERA).

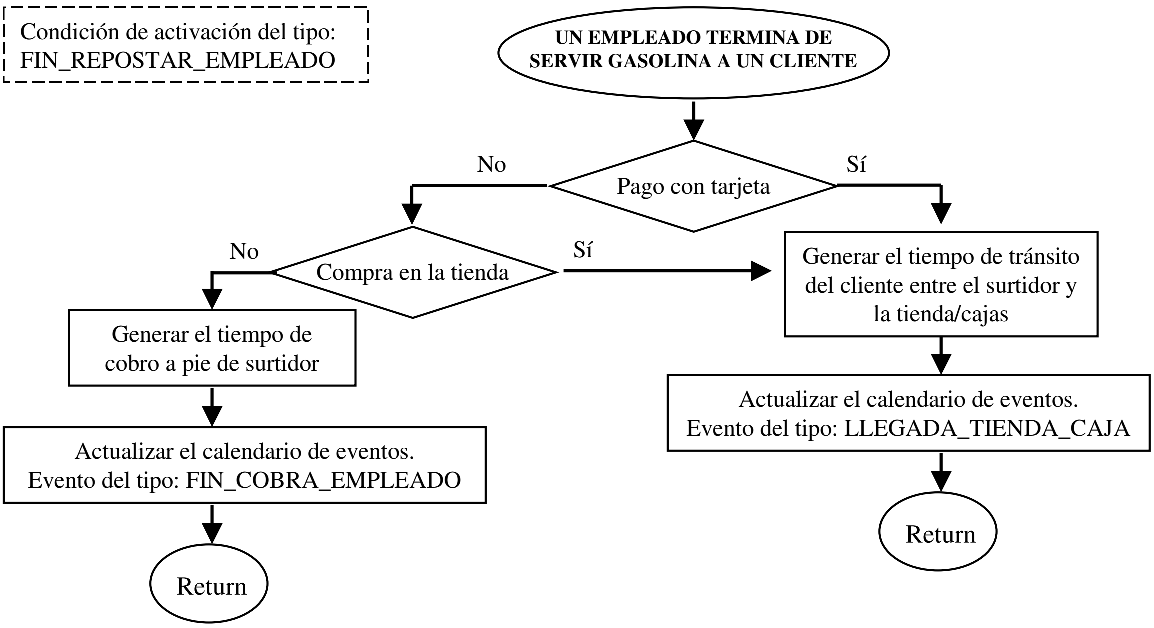


Figura 4.3: Flujo de acciones del evento "Un empleado termina de servir gasolina a un cliente" (FIN_REPOSTAR_EMPLEADO).

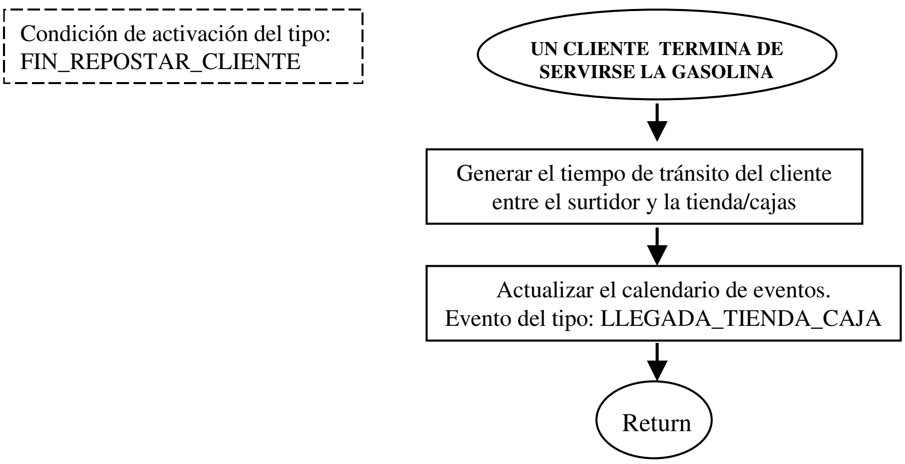


Figura 4.4: Flujo de acciones del evento "Un cliente termina de servirse la gasolina" (FIN_REPOSTAR_CLIENTE).

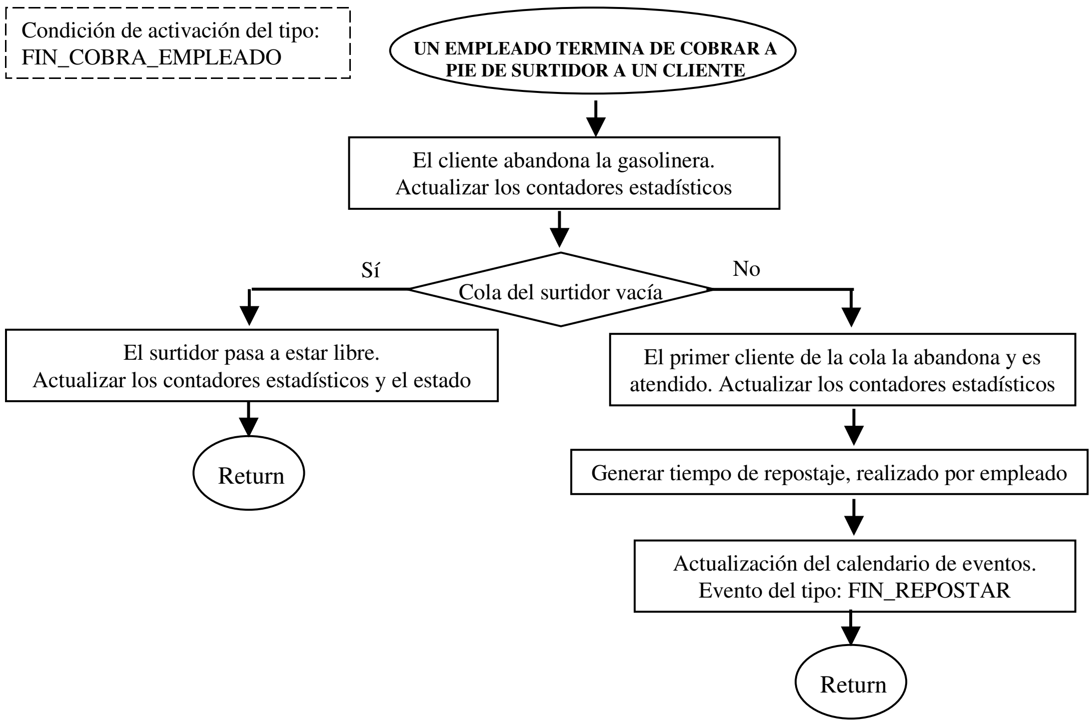


Figura 4.5: Flujo de acciones del evento “Un empleado termina de cobrar a un cliente en el surtidor” (FIN_COBRA_EMPLEADO).

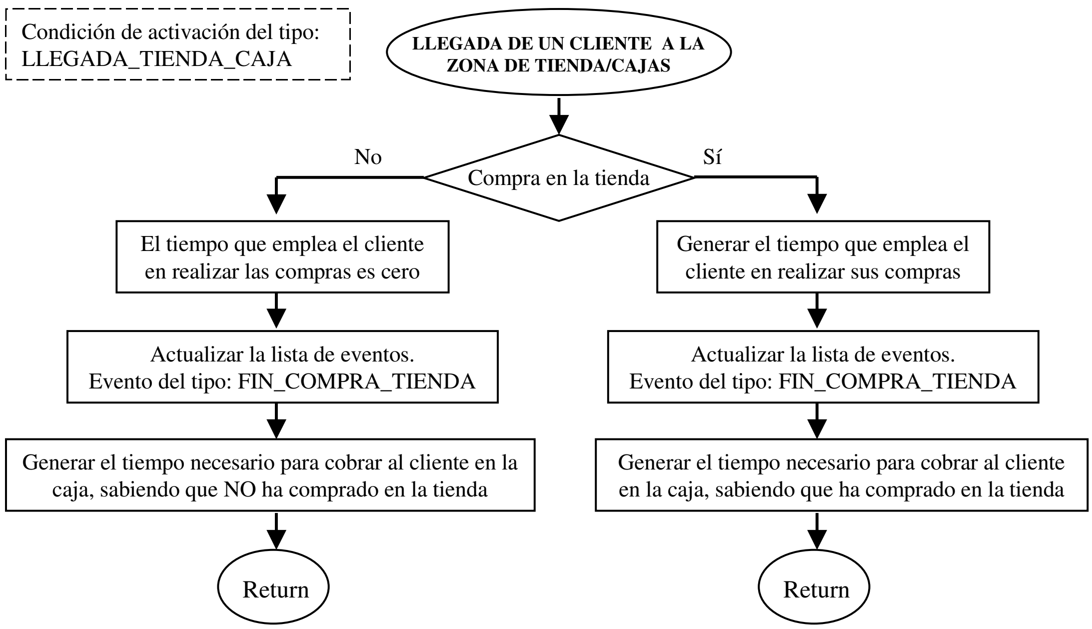


Figura 4.6: Flujo de acciones del evento “Un cliente llega a la zona de tienda/cajas” (LLEGADA_TIENDA_CAJA).

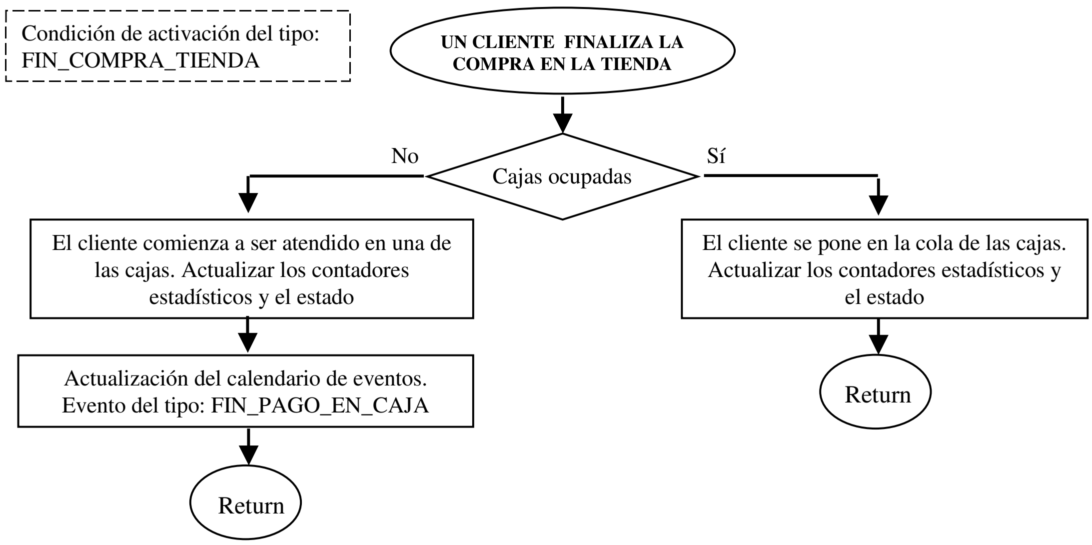


Figura 4.7: Flujo de acciones del evento “Un cliente finaliza la compra en la tienda” (FIN_COMPRA_TIENDA).

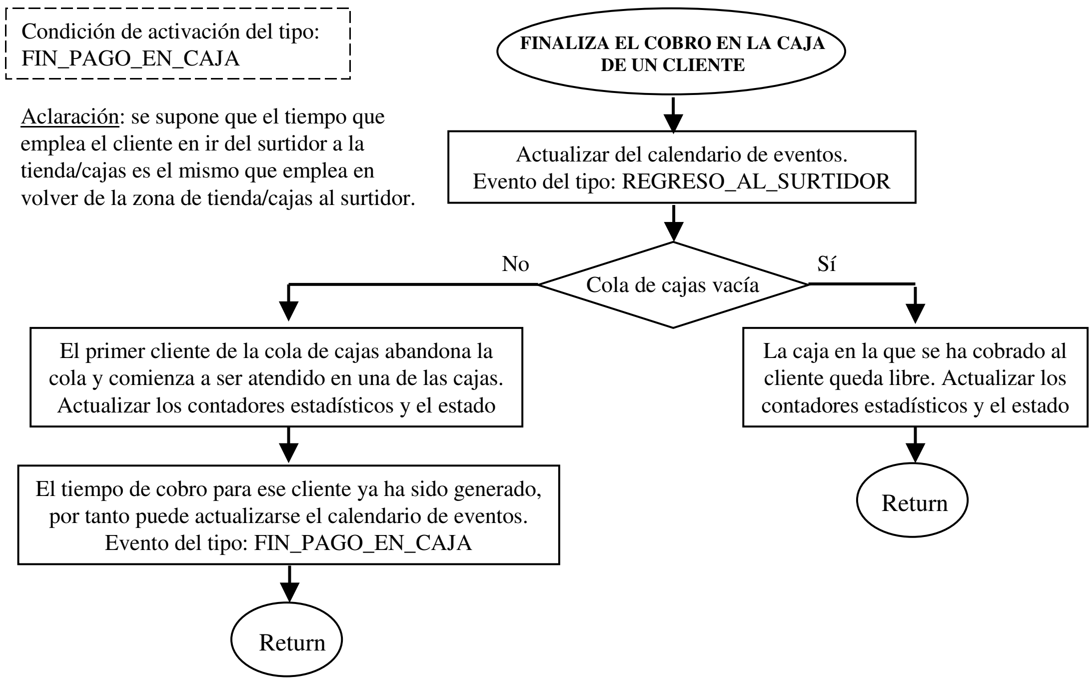


Figura 4.8: Flujo de acciones del evento “Un cliente termina de pagar en la caja” (FIN_PAGO_EN_CAJA).

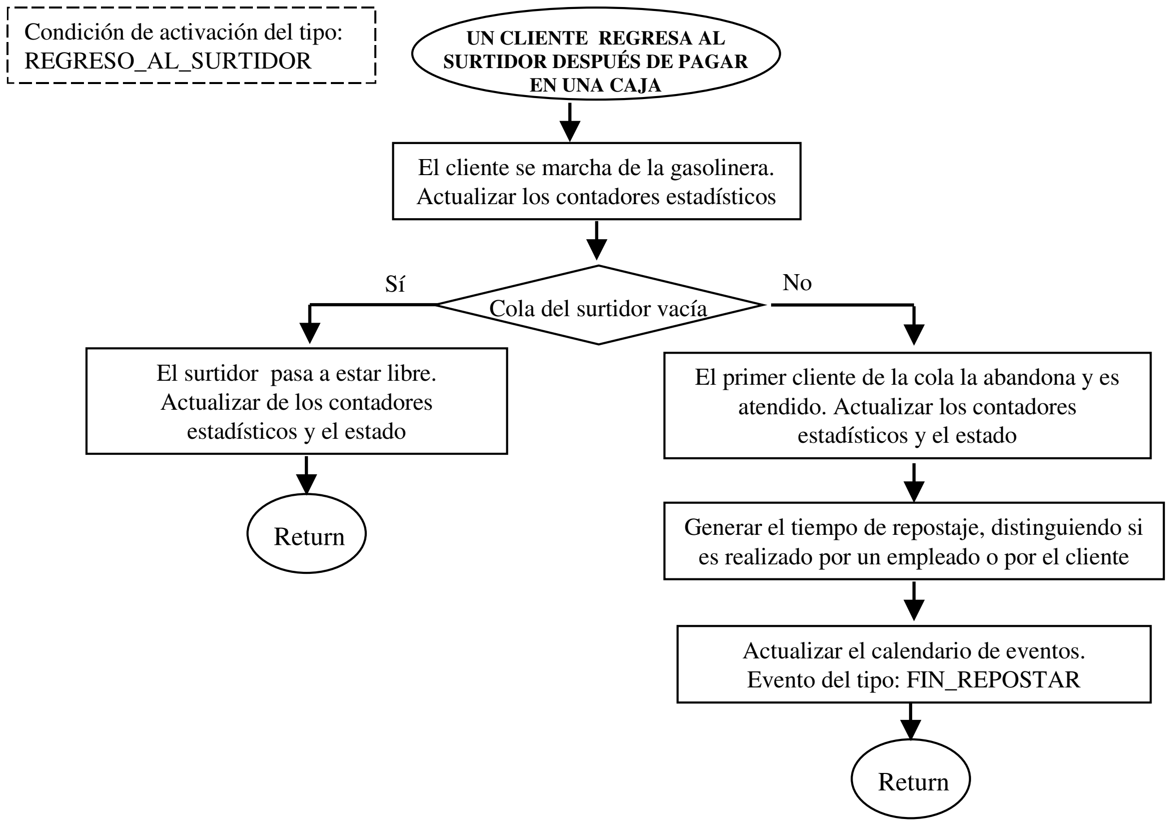


Figura 4.9: Flujo de acciones del evento “Un cliente regresa al surtidor después de pagar en la caja” (REGRESO_AL_SURTIDOR).

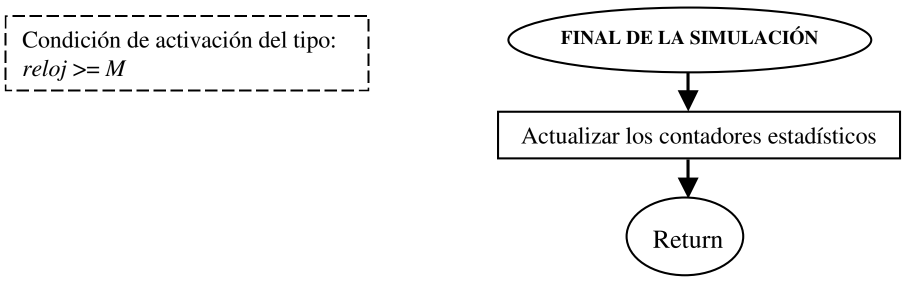


Figura 4.10: Flujo de acciones del evento “Final de la simulación”.

Problema 4.2

Describa, empleando la metodología de la orientación a los procesos, el modelo que usted ha propuesto al contestar al Problema 2.1. En particular, responda a las cuestiones siguientes:

- *Cuáles son las entidades.*
- *Cuáles son procesos. Cuál es el recurso de cada proceso.*
- *En cada proceso, qué acción ejerce la entidad sobre el recurso.*
- *Describa el flujo de las entidades a través del modelo.*

SOLUCIÓN

El modelo tiene un único tipo de entidad: el cliente. A continuación se indican los procesos que componen el modelo, cuál es el recurso de cada uno de ellos y qué acción realiza la entidad sobre dicho recurso.

- *Repostaje de combustible.*
  El recurso es el surtidor: hay tantas unidades de este recurso en el proceso como surtidores haya en la gasolinera. Si la gasolinera no funciona como autoservicio, es decir, si son los empleados de la gasolinera quienes sirven el combustible, se supone que en todo momento existe un empleado en cada surtidor dispuesto a atender al cliente cuando la disponibilidad del surtidor lo permita. Por este motivo, se considera que el recurso es el surtidor y no se tiene en cuenta al empleado.
  La entidad realiza sobre el recurso la acción siguiente. Si el recurso está ocupado, la entidad espera (Wait) en la cola hasta que el recurso quede disponible. Cuando el recurso está disponible, la entidad lo captura (Seize) y entonces espera (Delay) mientras el recurso realiza las operaciones pertinentes sobre ella, concluidas las cuales la entidad abandona el proceso, pero sin liberar el recurso. Este tipo de acción de denomina "Seize-Delay".
- *Pago en el surtidor.*
  Como se ha indicado anteriormente, el recurso de este proceso es el surtidor, ya que aunque realmente el cobro lo realiza al empleado, se supone que existe un empleado asociado a cada surtidor.
  Puesto que el cliente captó el surtidor en el proceso de repostaje, y no lo ha liberado, el cliente no necesita esperar cola, simplemente espera (Delay) mientras el recurso realiza las operaciones (es decir, el cobro) y a continuación libera el recurso (Release). Este tipo de acción se denomina "Delay-Release".
- *Tránsito del surtidor a la zona de tienda / cajas.*
  Este proceso no tiene recurso: la entidad no necesita ningún recurso para ir desde el surtidor a la zona de tienda/cajas, simplemente necesita dedicar un cierto tiempo a completar estar tarea. En otras palabras, el proceso consiste únicamente en que la entidad se mantiene durante cierto tiempo esperando (Delay) a que finalice el proceso. Puesto que no se necesita recurso, un número arbitrario de entidades pueden tanto acceder al proceso simultáneamente como finalizarlo simultáneamente. Este tipo de acción de denomina "Delay".
- *Compras.*
  Al igual que el proceso "tránsito", el proceso "compras" no tiene recurso. El cliente simplemente selecciona qué artículos de la tienda desea comprar, para lo cual únicamente es preciso que el cliente dedique cierto tiempo a la realización de la tarea. Por ello, la acción es del tipo "Delay".
- *Pago en una caja.*
  El recurso es la caja: hay tantas unidades de este recurso en el proceso como cajas haya en la gasolinera.
  Cuando un recurso (una caja) queda disponible, la entidad lo captura (Seize), espera (Delay) mientras el recurso realiza las operaciones sobre ella (efectúa el cobro), y a continuación la entidad (cliente) libera (Release) el recurso (es decir, la caja queda libre).

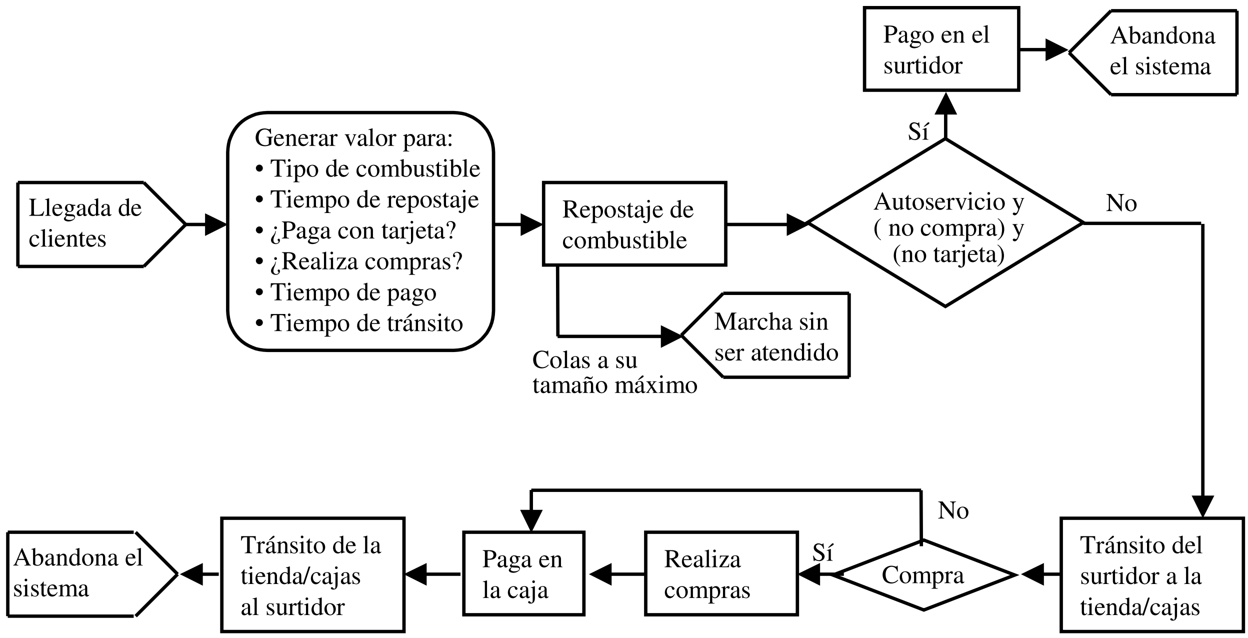


Figura 4.11: Modelo orientado al proceso: flujo de las entidades a través del sistema.

Finalmente, la entidad abandona el proceso. Este tipo de acción se denomina “Seize-Delay-Release”.

- *Tránsito de la zona de tienda / cajas al surtidor.*
  Este proceso es similar al proceso de tránsito del surtidor a la tienda/cajas, pero con la diferencia de que en este caso la entidad no sólo espera (Delay), sino que a continuación libera el recurso: el surtidor. Este tipo de acción se llama “Delay-Release”.

En la Figura 4.11 se representa esquemáticamente cuál es el flujo de las entidades por el sistema. El modelado orientado a los procesos se explicará detenidamente en el Tema 6.

Tema 5

Simulación usando un lenguaje de programación

Problema 5.1

Suponga que en el modelo de la cola atendida por un único empleado no se desea calcular el tiempo medio de espera en la cola. ¿Cómo deberían modificarse los flujos de acciones asociadas a los eventos, mostrados en la Figura 5.1?

SOLUCIÓN

Para calcular el tiempo medio de espera en la cola, se va sumando a lo largo de la simulación el tiempo de espera de cada cliente. El acumulador estadístico D contiene el valor de esta suma, y su valor se actualiza cada vez que un cliente abandona la cola (ver la Figura 5.1). Finalizada la simulación, el tiempo medio de espera se calcula dividiendo el tiempo de espera total de todos los clientes, D, por el número de clientes, n. Es decir: $\hat{d}(n) = \frac{\sum_{i:1}^{n} D_i}{n} = \frac{D(n)}{n}$.

El tiempo que ha debido esperar el cliente i-ésimo en la cola es igual al valor del reloj de la simulación cuando abandona la cola, menos el instante en el cual el cliente llegó al sistema y se puso a la cola, t_i. En la Figura 5.2 se muestra el diagrama de flujo modificado.

Problema 5.2

En el modelo de la cola atendida por un único empleado desea calcularse una nueva variable de salida: el tiempo de ciclo medio de los clientes. El tiempo de ciclo es el tiempo total que pasa el cliente en el sistema, es decir, el tiempo que espera en la cola más el tiempo durante el cual el empleado le atiende. ¿Cómo deberían modificarse las acciones asociadas a los eventos?

SOLUCIÓN

Para calcular el tiempo de ciclo medio es necesario ir sumando, a lo largo de la simulación, el tiempo que pasan los clientes en el sistema. El acumulador estadístico, T_C, que almacena ese dato debe inicializarse a cero, y actualizarse cada vez que un cliente abandone el sistema. Para ello es necesario llevar registro del instante de llegada de cada cliente. En la Figura 5.3 se muestra el diagrama de flujo. El tiempo de ciclo medio se calcula dividiendo el valor de T_C por el número de clientes que han abandonado el sistema, n_{OUT}.

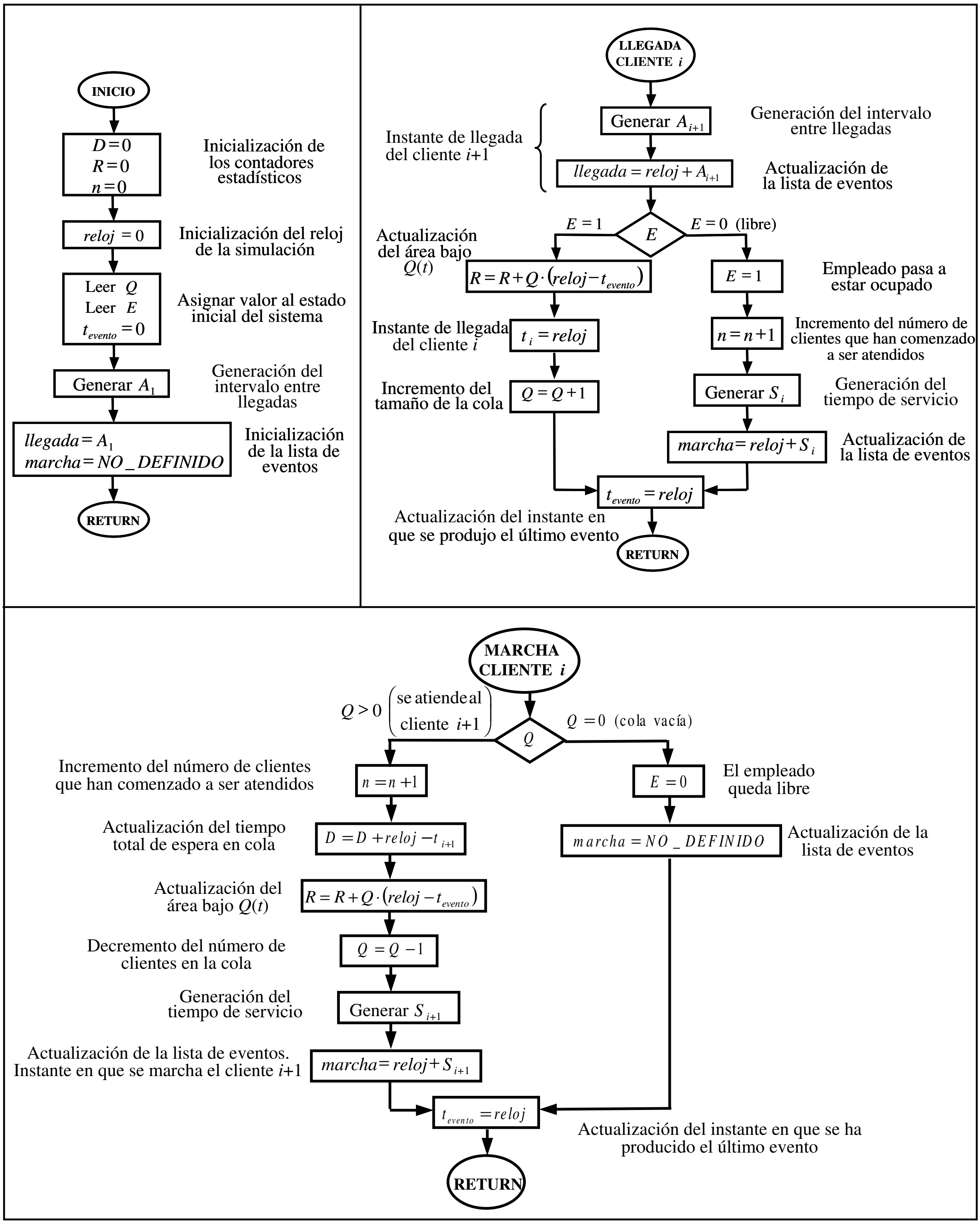


Figura 5.1: Flujos de acciones asociadas a los eventos.

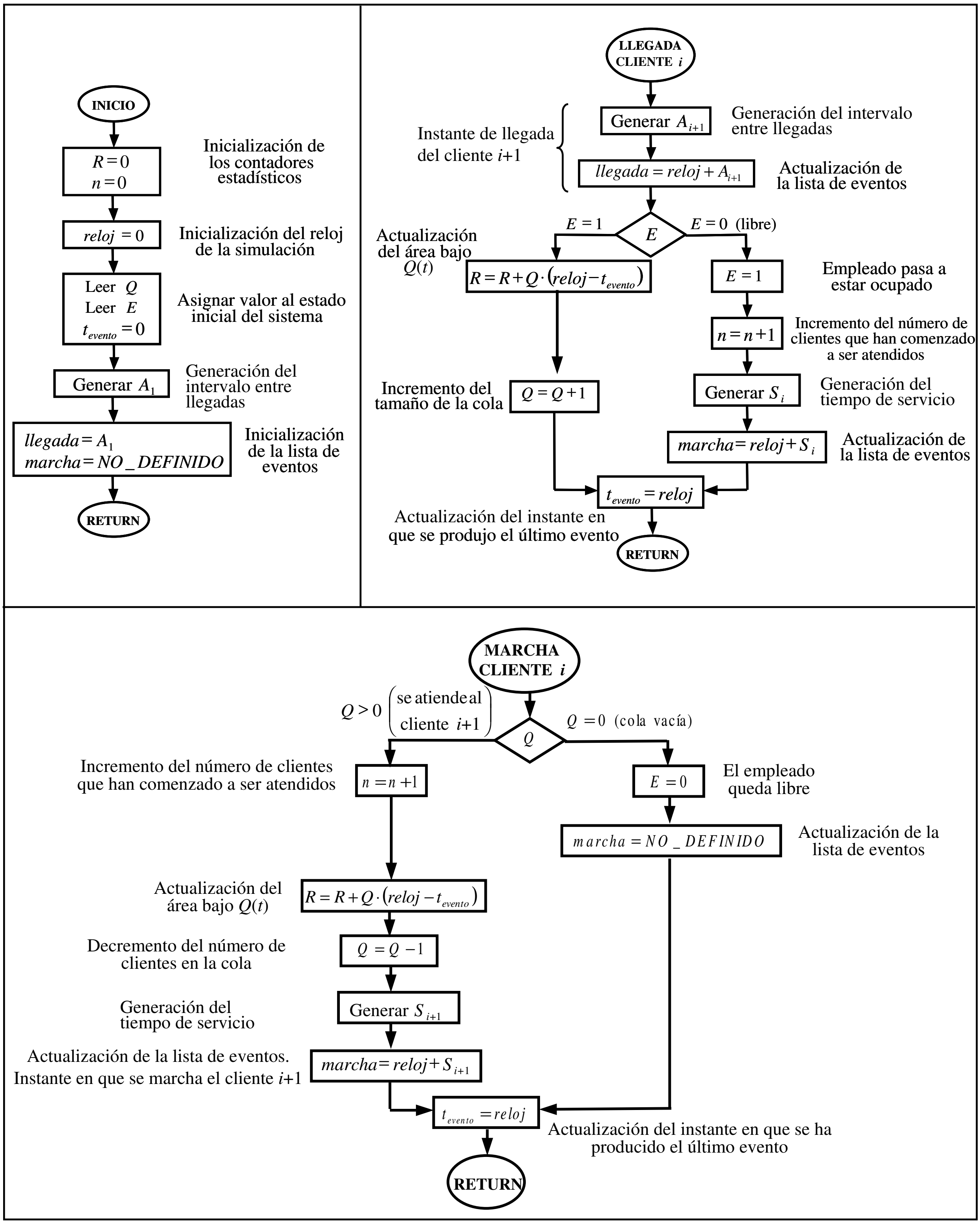


Figura 5.2: Flujo modificado para no calcular el tiempo medio en cola.

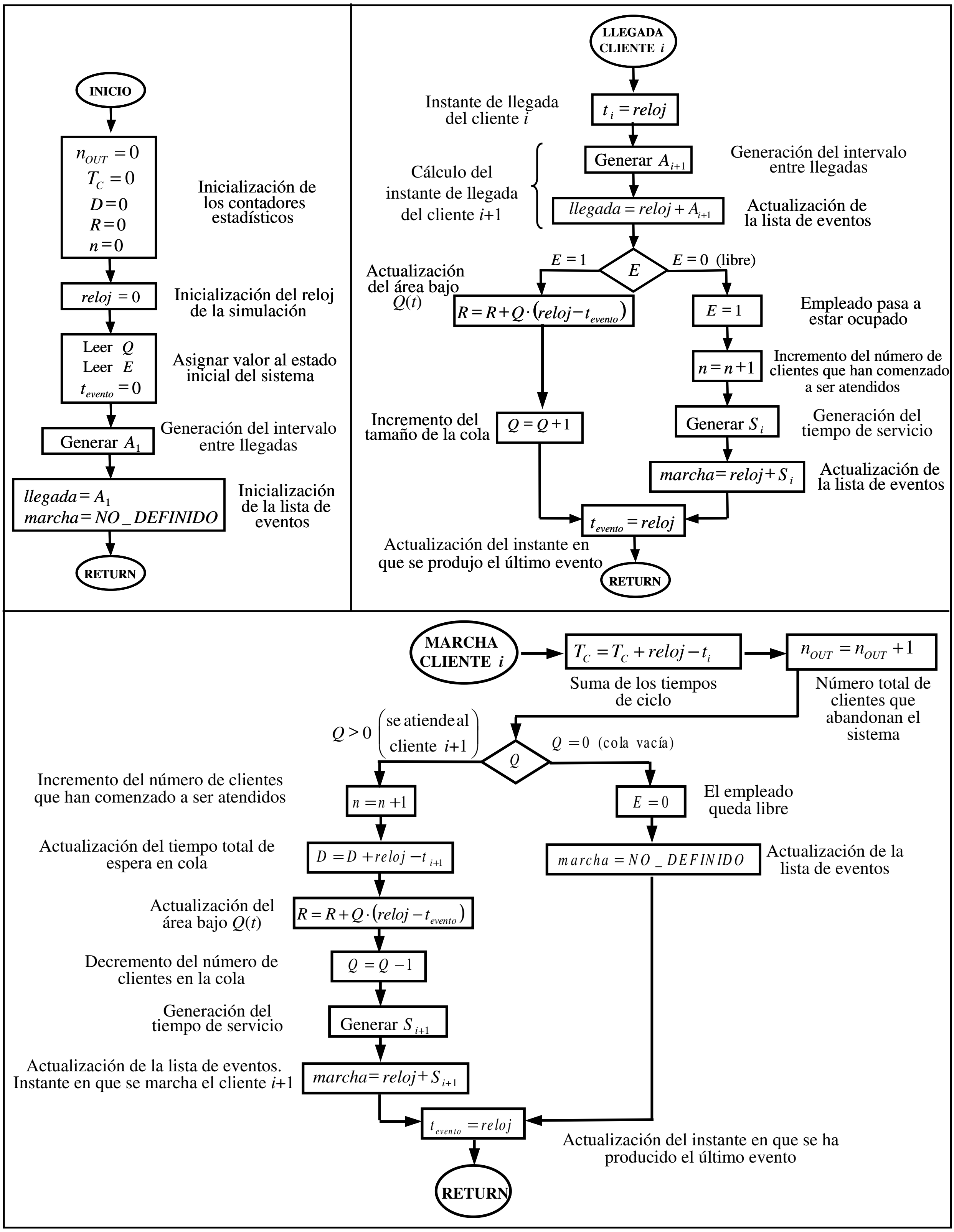


Figura 5.3: Flujo modificado para calcular el tiempo de ciclo.

Problema 5.3

Suponga que, además de la nueva variable de salida descrita en el Problema 5.2, se desean calcular:

- *El tiempo máximo de espera en la cola.*
- *El número máximo de clientes que esperan en la cola.*
- *La proporción de clientes que han debido esperar en la cola más de 1 minuto.*
- *La "utilización" del empleado, que se define como el tiempo que ha permanecido ocupado dividido por el tiempo total (es decir, el tiempo que ha estado ocupado más el tiempo durante el cual ha estado libre).*

¿Cómo deberían modificarse las acciones asociadas a los eventos?

SOLUCIÓN

Para obtener el valor máximo del tiempo de espera en cola, se define un acumulador estadístico, D_{MAX}, en el que se va guardando el tiempo máximo de espera a lo largo de la simulación. Inicialmente se asigna: $D_{MAX} = 0$. Cada vez que un cliente abandona la cola, se compara el tiempo de espera del cliente con el valor de D_{MAX}, y se guarda en D_{MAX} aquel de los dos que sea mayor.

El número máximo de clientes que esperan en la cola se obtiene de manera análoga. Se define un acumulador estadístico, Q_{MAX}, que es inicializado a cero. Cada vez que se incrementa el tamaño de la cola, se compara Q_{MAX} con el número de clientes en la cola. Si éste es mayor que Q_{MAX}, se actualiza el valor de Q_{MAX}.

Se define un nuevo acumulador estadístico, $n_{D>1}$, para ir llevando la cuenta durante la simulación del número de clientes que han debido esperar en la cola más de 1 minuto. Cuando un cliente abandona la cola, se comprueba si su tiempo de espera ha sido mayor a un minuto, en cuyo caso se incrementa en uno el valor de $n_{D>1}$. Para calcular la proporción que supone este número de clientes respecto del total que han comenzado a ser atendidos, debe calcularse: $\frac{n_{D>1}}{n}$.

Para calcular la ocupación del empleado, se define el acumulador estadístico S, en el que se va sumando el tiempo que pasa el empleado ocupado a lo largo de la simulación. El tiempo que el empleado tarda en atender al cliente i-ésimo es S_i. El valor del acumulador S debe actualizarse cada vez que un cliente abandona el sistema. La utilización puede calcularse dividiendo S por la duración de la simulación.

En la Figura 5.4 se muestra el flujo de acciones modificado para calcular los 4 estadísticos anteriormente indicados.

Problema 5.4

Modifique el modelo de la cola atendida por un único de modo que la condición de finalización sea la siguiente. Una vez el sistema ha operado durante 8 horas, ya no se permite el acceso de más clientes. El empleado termina de atender a los clientes que en ese instante se encuentran en el sistema, y una vez ha concluido, finaliza la simulación.

SOLUCIÓN

En la Figura 5.5 se muestra un posible diagrama de flujo del programa principal. Una vez comenzado el programa, se ejecuta la rutina "Inicialización". A continuación se inicializan dos contadores, $i_{llegada}$ e i_{marcha}, que van registrando el número de clientes que han llegado al sistema y que lo han abandonado, respectivamente.

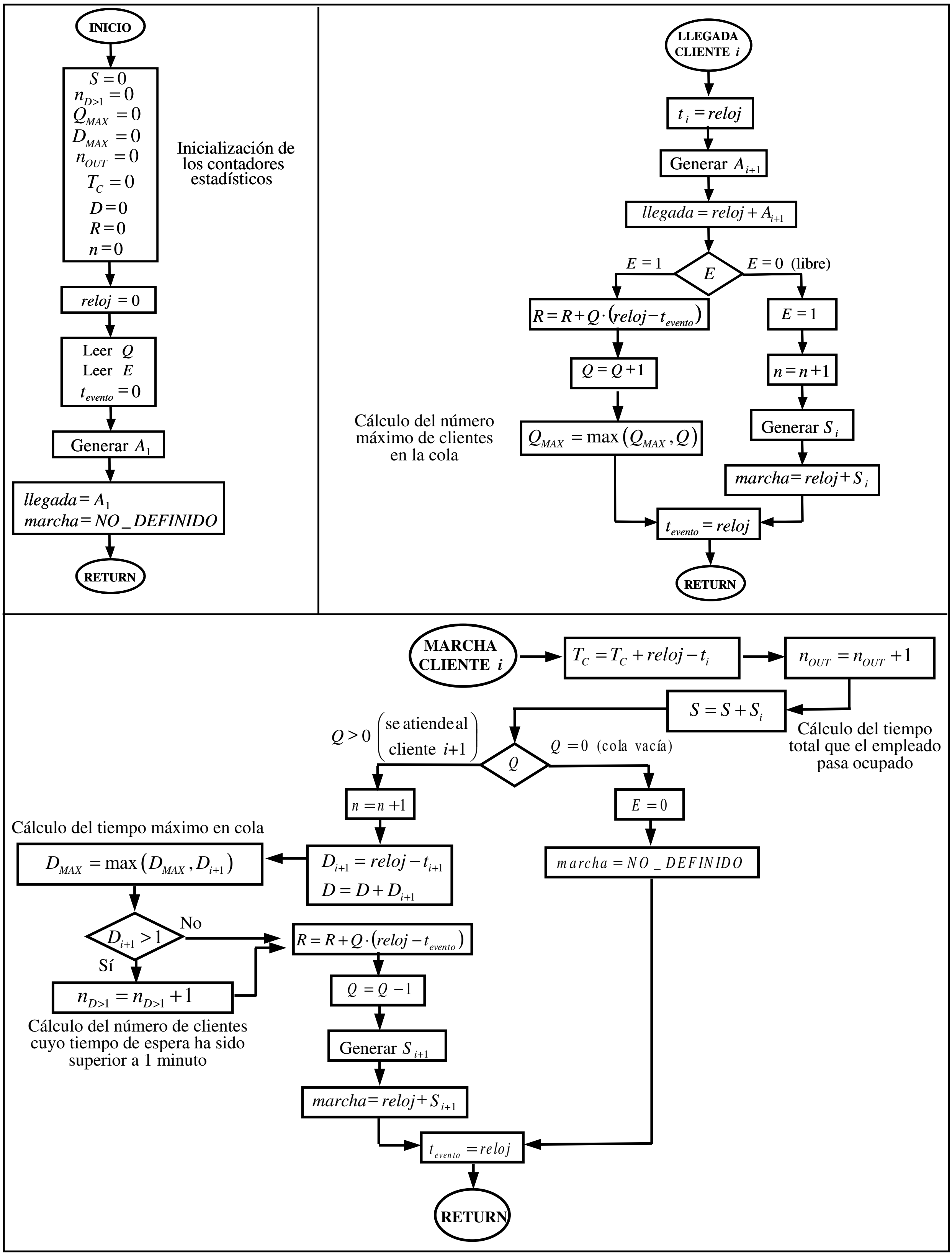


Figura 5.4: Flujo modificado según se indica en el Problema 5.3.

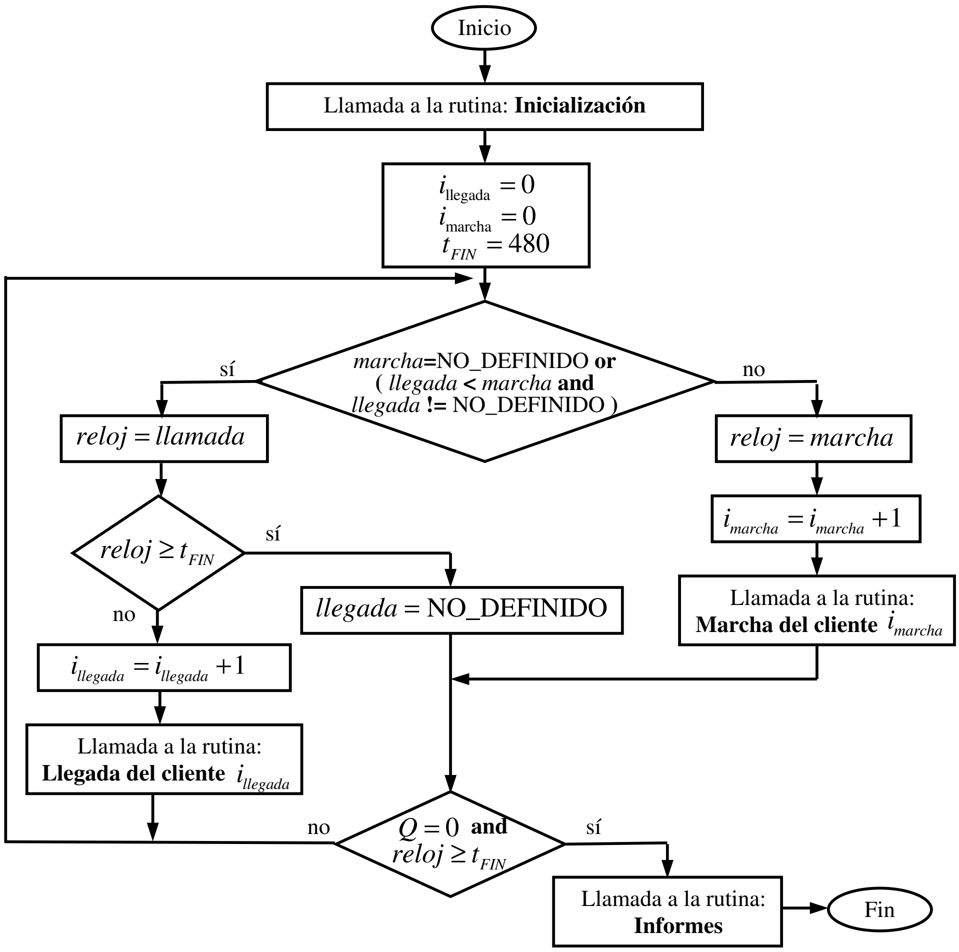


Figura 5.5: Flujo del programa principal (Problema 5.4).

La condición de la primera bifurcación en el flujo del programa determina el tipo de evento que debe ejecutarse (ver la Figura 5.5). En la rutina de inicialización se asigna a $marcha$ el valor NO_DEFINIDO, y a $llegada$ un valor numérico. Por ello, en la primera pasada del programa por la bifurcación el programa progresa por la rama "sí": se avanza el reloj de la simulación hasta el instante en que llega el primer cliente y se ejecutan las acciones asociadas al evento "Llegada del cliente 1".

En las sucesivas pasadas del programa por la primera bifurcación, se escogerá la rama "no" cuando $marcha < llegada$ o cuando $llegada =$ NO_DEFINIDO. Esta última condición se verificará cuando el reloj de la simulación haya superado el valor $t_{FIN} = 480$ minutos, y ya no se permita la llegada de nuevos clientes.

Problema 5.5

Suponga que en la cola del modelo descrito en el Problema 5.4 sólo hay sitio para que esperen dos clientes. Cuando hay dos clientes en la cola, y llega un nuevo cliente, éste no puede ponerse a la cola, con lo cual abandona directamente el sistema (esta propiedad se denomina balking). Modifique el modelo de modo que contemple está nueva característica, y *de modo que se calcule una nueva variable de salida: el número total de clientes que no han podido ser atendidos por estar la cola llena.*

SOLUCIÓN

Es preciso modificar el flujo de acciones asociadas al evento "Llegada de un cliente" (ver la Figura 5.6). Cuando el empleado está ocupado, y el cliente debe ponerse a la cola, se comprueba si el tamaño de la cola es 2, en cuyo caso se incrementa el contador del número de clientes obligados a abandonar el sistema ($n_{BALKING}$), y se sale de la rutina. En la rutina de inicialización se pone este contador a cero.

Problema 5.6

Realice la siguiente modificación en el modelo de gestión del inventario. Si en el momento de ordenar el pedido la cantidad de producto almacenada es $I < 0$, entonces la compañía realiza una orden urgente a su proveedor. Si la cantidad almacenada es $0 \leq I < s$, entonces se realiza una orden de compra normal.

El coste de tramitación de una orden urgente es superior al de una orden normal, si bien el coste por unidad de producto es el mismo. Una orden urgente de Z unidades de producto cuesta $C_{urgente} = K_{urgente} + i \cdot Z$, donde $K_{urgente} = 7000$ euros. En contrapartida, el tiempo de entrega de una orden urgente está uniformemente distribuido entre 0.25 y 0.5 meses.

SOLUCIÓN

El modelado de las órdenes urgentes se realiza modificando el flujo de acciones asociado al evento "Evaluación del inventario". El nuevo flujo se muestra en la Figura 5.7. La actualización del valor del coste, y del instante en el cual se recibirá el pedido, se realiza teniendo en cuenta si el número de unidades de producto existentes en el almacén es negativo o no.

Problema 5.7

En el modelo del inventario, suponga que los productos almacenados son perecederos. Cada unidad de producto tiene una fecha de caducidad, que está distribuida uniformemente entre 1.5 y 2.5 meses, empezando a contar desde que es recibida y se almacena. Obsérvese que cada una de las diferentes unidades de producto pertenecientes a un mismo pedido puede tener una fecha de caducidad diferente. Los productos caducados no tienen ningún valor, y deben ser desechados.

La compañía descubre que una determinada unidad de producto está caducada cuando la examina justo antes de venderla. Los productos del inventario se procesan de manera FIFO, es decir, se envían antes los productos que más tiempo llevan almacenados. Modifique el modelo para describir esta nueva característica, y además añada una nueva variable de salida: el número total de unidades de producto que han debido ser desechadas por encontrarse caducadas.

SOLUCIÓN

En este caso no es suficiente con llevar la cuenta de la cantidad de producto que se encuentra almacenado, $I(t)$. Puesto que cada unidad de producto tiene asociada una fecha de caducidad, es necesario definir una lista que contenga las fechas de caducidad.

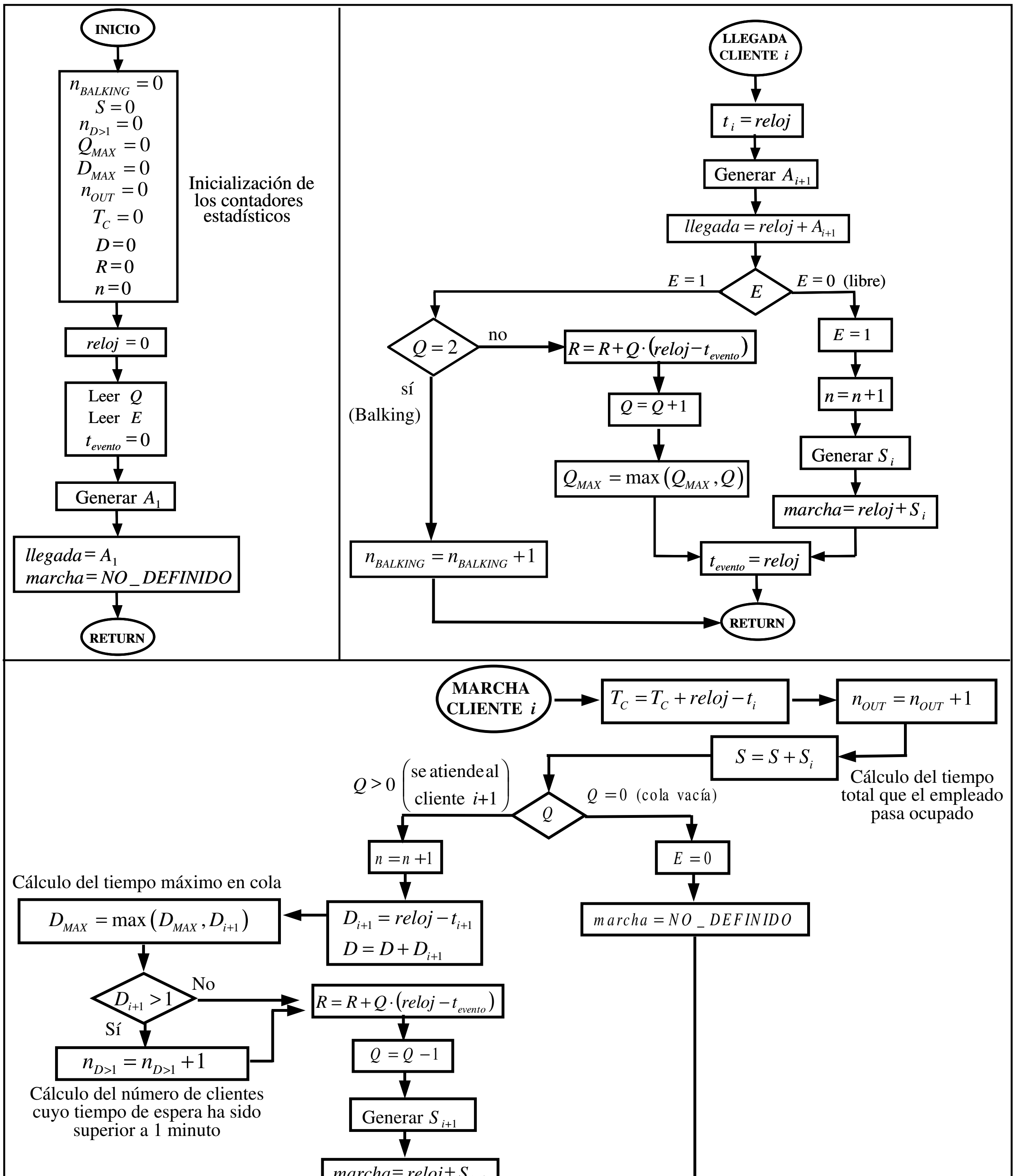


Figura 5.6: Flujo de acciones con balking (Problema 5.5).

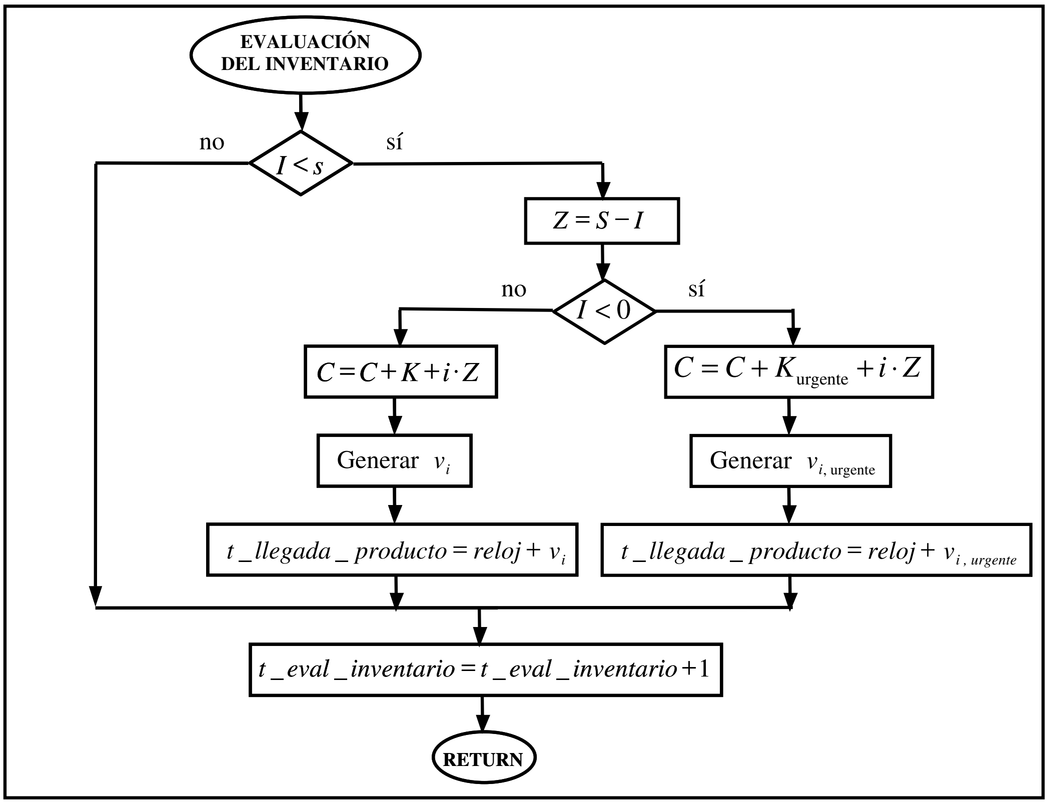


Figura 5.7: Acciones al evaluar el inventario, con la opción del pedido urgente.

En el flujo de acciones del evento ”Llegada de producto” (ver la Figura 5.5 del texto de teoría), una vez actualizado el inventario (acción $I = I + Z$), deben generarse Z números aleatorios distribuidos uniformemente entre 1.5 y 2.5 meses, sumarles a todos ellos el valor del reloj de la simulación, y añadir estos Z elementos a la cola de la lista.

En el diagrama de flujo del evento ”Pedido del cliente”, debe sustituirse la acción de actualización del inventario, $I = I - d_i$ (ver la Figura 5.5 del texto de teoría), por una llamada a la rutina mostrada en la Figura 5.8. En la rutina se definen dos variables locales: $n_{CADUCADO}$ y $n_{NO\_CADUCADO}$, que contabilizan el número de elementos de la lista, inspeccionados en la actual llamada a la subrutina, que están o no caducados, respectivamente. Al realizar la llamada a la subrutina, se supone que el número de unidades de producto que ha solicitado el cliente es d_i.

El acumulador estadístico que contabiliza a lo largo de la simulación la cantidad de producto que ha sido desechado es $N_{TOTAL\_CADUCADO}$. En la rutina de inicialización debe asignarse: $N_{TOTAL\_CADUCADO} = 0$.

Problema 5.8

Realice el modelo de simulación del siguiente sistema. Un servicio de ventas consta de dos empleados dispuestos en serie, cada uno con su propia cola FIFO. El cliente es atendido por el primer empleado, a continuación por el segundo, y seguidamente abandona el sistema. El tiempo que transcurre entre la llegada de un cliente y la del siguiente está distribuido

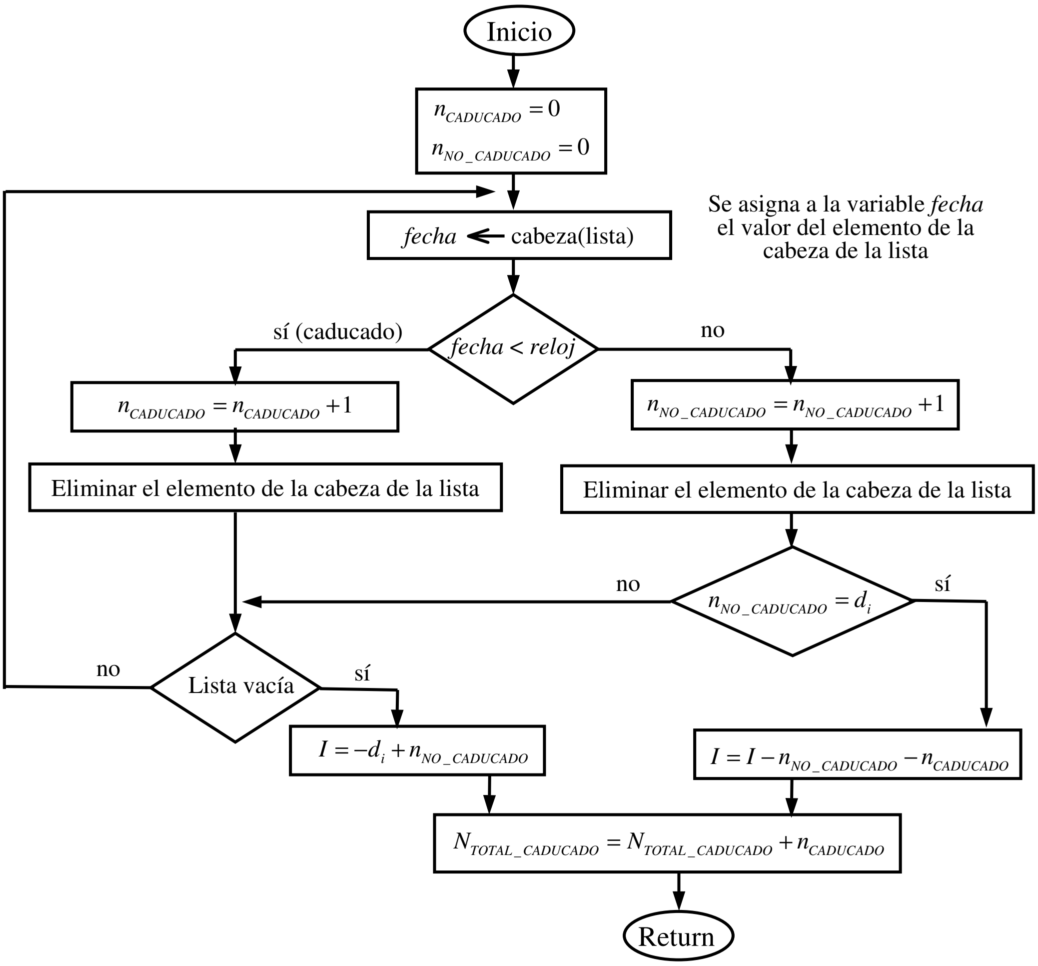


Figura 5.8: Inspección del producto antes de enviarlo al cliente (Problema 5.7).

exponencialmente, con media 1 *minuto. El tiempo que emplea el primer empleado en atender a un cliente está distribuido exponencialmente, con media* 0.7 *minutos; mientras que el tiempo que emplea el segundo empleado está distribuido exponencialmente, con media* 0.9 *minutos.*

Las variables de salida del modelo son:

- *El tiempo medio de espera en cada una de las dos colas.*
- *La longitud media de cada una de las dos colas.*
- *La utilización de cada uno de los empleados.*

La condición de finalización es que el tiempo simulado alcance los 1000 minutos. Se supone que la oficina funciona ininterrumpidamente durante todo ese tiempo.

SOLUCIÓN

Los diagramas de flujo del modelo de la oficina atendida por un empleado, mostrados en la Figura 5.1, pueden ser generalizados para en caso de dos sistemas cola-empleado dispuestos en serie. En la Figura 5.9 se muestran los diagramas.

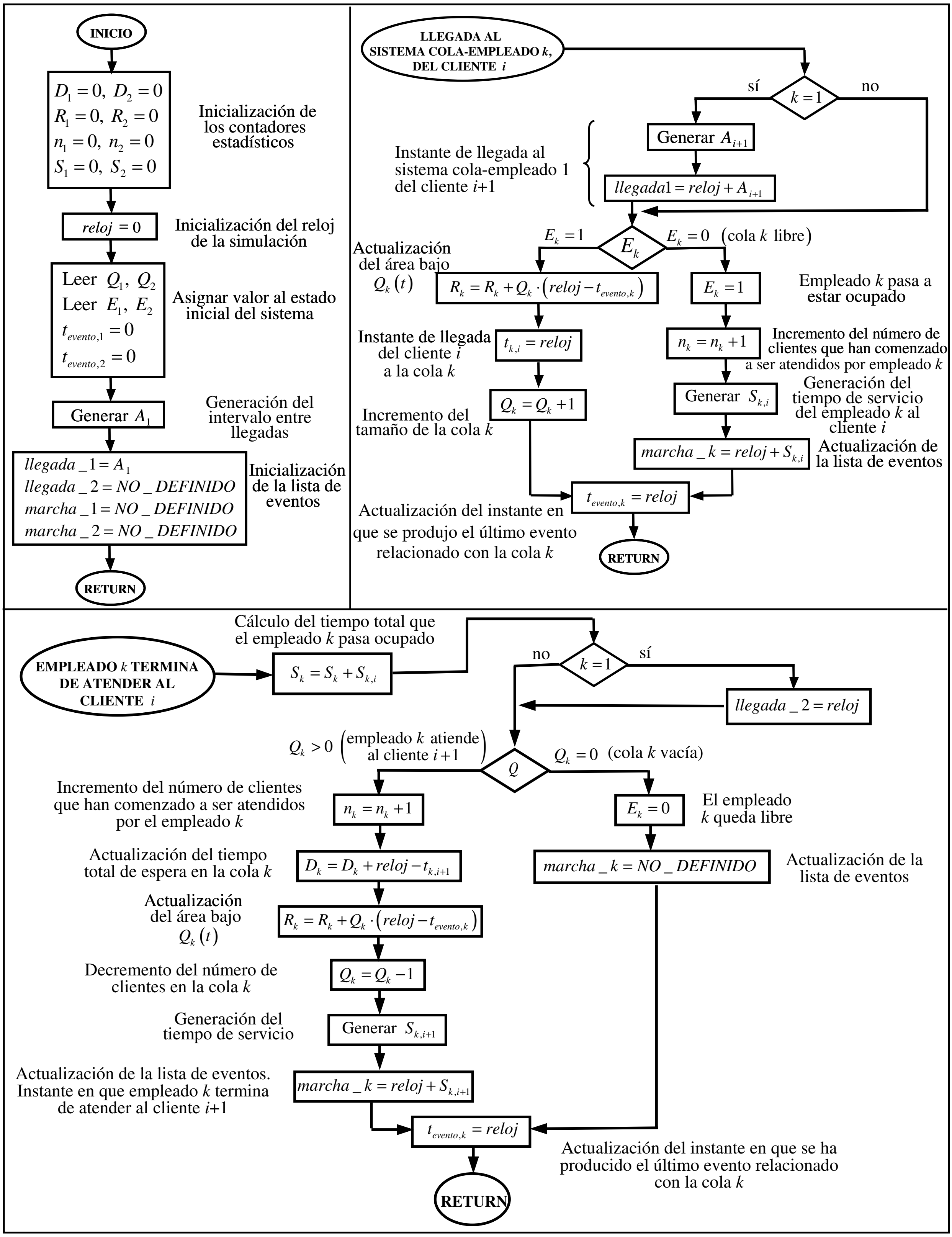


Figura 5.9: Flujo de acciones para dos sistemas cola-empleado en serie (Problema 5.8).

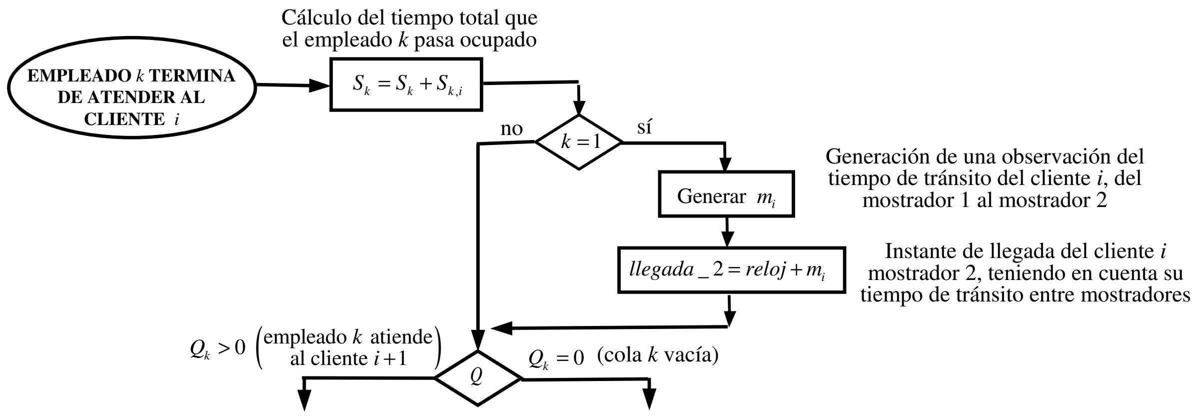


Figura 5.10: Modelado del tiempo de tránsito entre mostradores (Problema 5.9).

El calendario de eventos se ha ampliado con dos nuevos eventos: la llegada de un nuevo cliente al sistema cola-empleado 2, y la marcha de un cliente del sistema cola-empleado 2. Asimismo, cada contador estadístico se ha desdoblado en dos, con el fin de describir el comportamiento de cada uno de los dos sistemas cola-empleado. Lo mismo se ha hecho con los estados.

Los eventos "Llegada del cliente i" y "Marcha cliente i" han sido sustituidos por los eventos "Llegada al sistema cola-empleado k, del cliente i" y "Empleado k termina de atender al cliente i", respectivamente, donde k puede tomar el valor 1 ó 2.

Sólo es preciso generar una observación del intervalo entre llegadas cuando $k = 1$, es decir, cuando el cliente haya llegado al sistema cola-empleado 1. La llegada al sistema cola-empleado 2 se produce en el instante en que el cliente abandona el sistema cola-empleado 1.

Los contadores S_1 y S_2 van sumando el tiempo que pasa cada empleado ocupado. Dividiendo el valor de estos contadores por la duración de la simulación, puede calcularse la ocupación de cada empleado. El tiempo medio de espera en cada cola y el tamaño medio de las colas puede calcularse a partir de D_1, D_2, R_1 y R_2, al igual que se hace en el modelo con un único empleado.

Problema 5.9

Modifique el modelo del Problema 5.8, de modo que se contemple que el tiempo que tarda el cliente en ir desde el mostrador del primer empleado hasta el mostrador del segundo empleado está distribuido uniformemente entre 0.5 *y* 2.0 *minutos.*

SOLUCIÓN

Para incluir esta nueva característica en el modelo, es preciso modificar las acciones que se realizan cuando un cliente abandona el sistema cola-empleado 1. En concreto, es preciso modificar la actualización del calendario de eventos. En lugar de asignar: $llegada\_2 = reloj$ (ver la Figura 5.9), debe asignarse $llegada\_2 = reloj + m_i$, donde m_i es una observación de una variable aleatoria distribuida uniformemente entre 0.5 y 2.0 minutos. En la Figura 5.10 se muestra el detalle de la modificación.

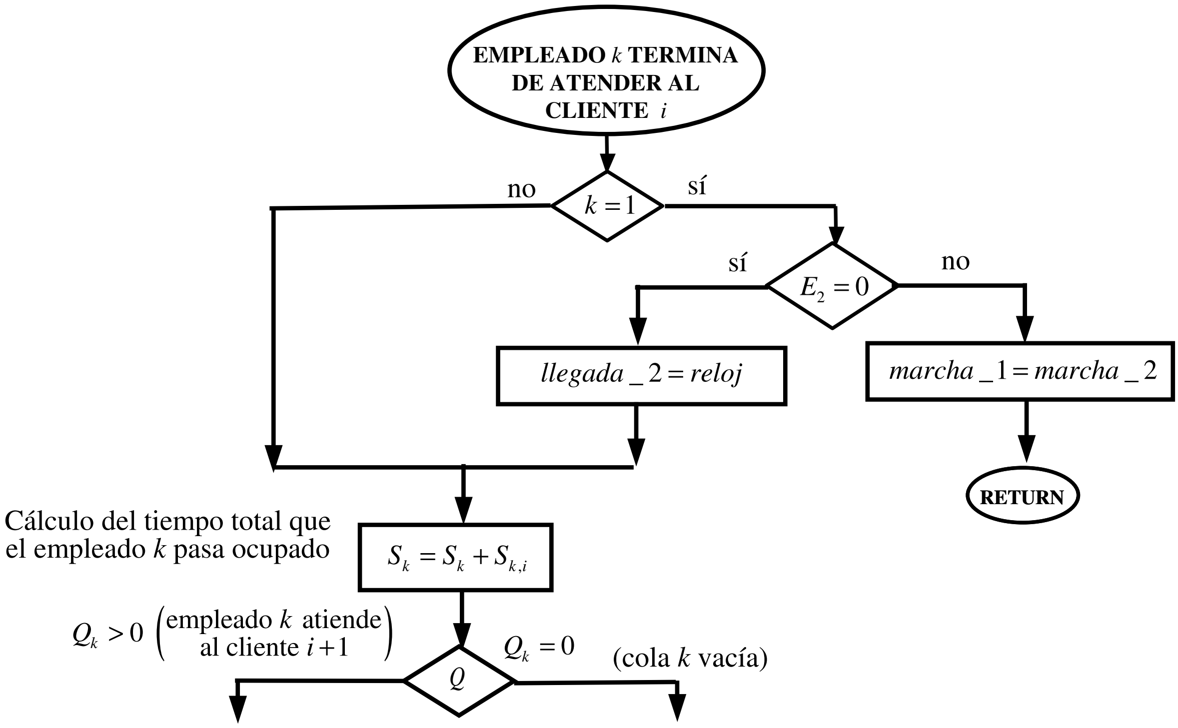


Figura 5.11: Modelado del bloqueo (Problema 5.10).

Problema 5.10

Modifique el Problema 5.8 de modo que el modelo describa la siguiente característica del sistema: no existe cola frente al mostrador del segundo empleado. Si el primer empleado termina de atender a un cliente, y el segundo empleado se encuentra todavía ocupado, entonces el primer empleado debe permanecer con el cliente hasta que el segundo empleado quede libre. Esta característica de denomina "bloqueo", ya que el cliente que permanece con el primer empleado, habiendo ya sido atendido, no recibe servicio, pero impide que un nuevo cliente pueda ser atendido por el primer empleado. Cuando el segundo empleado queda libre, el cliente abandona al primer empleado y pasa a ser atendido por el segundo. Entonces el primer empleado puede atender al primer cliente que se encuentra en su cola.

SOLUCIÓN

Para modelar el bloqueo descrito en el enunciado es preciso modificar las acciones que se realizan cuando el empleado 1 termina de atender a un cliente. En la Figura 5.11 se muestra el detalle de la modificación respecto al flujo de acciones de la Figura 5.9. Cuando ha llegado el instante de marcha del cliente atendido por el empleado 1 ($marcha\_1$), si el empleado 2 no se encuentra libre, entonces se retrasa el instante de marcha del cliente hasta el momento en el cual el empleado 2 quede libre ($marcha\_2$).

Si se activan en el mismo instante eventos de marcha y de llegada, es preciso ejecutar primero el evento de marcha del sistema cola-empleado 2, a continuación el evento de marcha del sistema cola-empleado 1, seguidamente el evento de llegada al sistema cola-empleado 2, y por último, el evento de llegada al sistema cola-empleado 1.

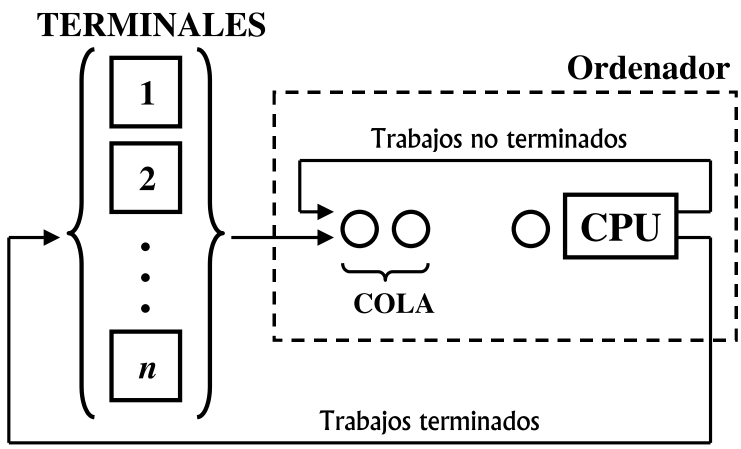


Figura 5.12: Modelo de un sistema informático de tiempo compartido.

Problema 5.11

Suponga que en el sistema descrito en el Problema 5.8, existe una probabilidad igual a 0.2 *de que un cliente que ha terminado de ser atendido por el segundo empleado se encuentre "insatisfecho", y desee volver a ser atendido por ambos empleados. Estos clientes, una vez el segundo empleado ha finalizado de atenderles, en lugar de abandonar el sistema, se ponen de nuevo en la cola del primer empleado. Modifique el modelo de modo que describa esta característica del sistema.*

Problema 5.12

Entre dos ciudades, A y B, existe un número fijo n *de líneas telefónicas. Cada línea puede ser operada en cualquier dirección (es decir, puede soportar una llamada realizada de A a B, o de B a A), sin embargo, en un determinado instante, cada línea sólo soporta una única llamada.*

Si una persona de la ciudad A o B desea realizar una llamada a la otra ciudad, y alguna de las n *líneas se encuentra disponible, entonces ocupa una línea inmediatamente. Pero si todas las líneas se encuentran ocupadas, entonces la persona escucha una grabación que le indica que debe colgar e intentarlo más tarde.*

El tiempo que transcurre entre intentos de llamada desde A a B está distribuido exponencialmente, con media 10 *segundos, y desde B a A está distribuido exponencialmente con media 12 segundos. La duración de la conversación también está distribuida exponencialmente, con media* 4 *minutos, con independencia de la procedencia de la llamada.*

Inicialmente todas las líneas se encuentran libres, y la simulación se ejecuta durante 12 horas. Se pretende calcular:

- *El número medio de líneas que se encuentran ocupadas.*
- *La proporción de llamadas que no pueden realizarse, por encontrarse todas las líneas ocupadas.*
- *El número total de llamadas realizadas desde cada ciudad.*

Problema 5.13

Una empresa tiene un sistema informático que consiste en una única CPU y n *terminales. El operario que trabaja en cada terminal "piensa" durante un tiempo, que está distribuido exponencialmente con media 25 segundos, y entonces envía a la CPU un trabajo, que requiere un tiempo de servicio* S*, que está distribuido exponencialmente, con media* 0.8 *segundos.*

Las tareas que llegan a la CPU forman una única cola, pero son atendidas de forma round-robin, en lugar que FIFO (ver la Figura 5.12). Esto es, la CPU asigna a cada tarea un tiempo de ejecución máximo de $q = 0.1$ *minutos. Si* q *es mayor que el tiempo que resta para finalizar la ejecución del trabajo,* s*, entonces la CPU invierte* $s + \tau$ *segundos en ejecutarlo y seguidamente lo devuelve al terminal. Para los trabajos recién llegados a la CPU se cumple* $s := S$*.* τ *es un tiempo fijo:* $\tau = 0.015$ *segundos.*

Sin embargo, si el tiempo necesario para completar la ejecución de la tarea, s*, es mayor que* q*, entonces la CPU invierte* $q + \tau$ *segundos en procesar el trabajo y a continuación pone el trabajo al final de la cola, decrementando el tiempo que resta para completarlo en* q *unidades (*$s := s - q$*). Este proceso se repite hasta que el trabajo es completado y devuelto al terminal.*

El tiempo de respuesta del trabajo i*,* R_i*, se define como el tiempo que transcurre desde que el terminal lo envía a la CPU y la CPU lo devuelve. El objetivo del estudio es determinar el número máximo de terminales que pueden conectarse en el sistema, de modo que el tiempo medio de respuesta no supere los* 30 *segundos. La condición de finalización de la simulación es que la CPU haya devuelto a los terminales* 1000 *trabajos. El tiempo medio de respuesta se calcula sobre estos* 1000 *trabajos.*

Realizar el diagrama de flujo del modelo de simulación que posibilite llevar a cabo este estudio.

Tema 6

Simulación usando Arena

Problema 6.1

Realice el estudio de simulación descrito a continuación[1], *usando para ello el entorno de modelado Arena.*

El modelo representa un paso en una cadena de fabricación, consistente en hacer un agujero en las piezas mediante una única máquina perforadora. Las piezas que llegan a este paso, son procesadas por un único recurso y abandonan el proceso. Si la perforadora se encuentra libre en el instante en que llega la pieza, entonces ésta es procesada inmediatamente. En caso contrario, la pieza espera su turno en una cola con disciplina FIFO.

El intervalo de tiempo entre llegadas sucesivas de piezas está distribuido exponencialmente, con media 5 minutos. Las piezas llegan de una en una. El tiempo de proceso está distribuido triangularmente, con rango de 1 a 6 minutos y modo 3 minutos.

Condiciones iniciales: la máquina está libre y la cola vacía. Condición de finalización: el tiempo simulado alcanza el valor 20 minutos. El objetivo del estudio es estimar los estadísticos siguientes:

- *Número total de piezas procesadas.*
- *Tiempo promedio de espera en la cola.*
- *Tiempo máximo de espera en cola.*
- *Número medio de piezas esperando en la cola.*
- *Tamaño máximo de la cola.*
- *Tiempo de ciclo medio, es decir, el valor esperado del tiempo que transcurre desde que la pieza llega al sistema hasta que lo abandona.*
- *Tiempo de ciclo máximo.*
- *Utilización de la máquina perforadora, es decir, proporción del tiempo que se encuentra ocupada.*

SOLUCIÓN

Para llevar a cabo el estudio de simulación, puede seguirse la secuencia de pasos siguiente:

Diagrama de módulos

Los módulos necesarios para la construcción de este modelo se encuentran en el panel "Basic Process". Si el panel no está presente en la barra de proyecto, es necesario añadirlo[2].

[1]Este estudio de simulación está extraído del texto (Kelton, Sadowski & Sadowski 2002).

[2]**Configuración de la barra del proyecto.** Arena dispone de varios paneles de módulos, los cuales se usan para construir el modelo. Pueden añadirse paneles de la barra de proyecto mediante: *File* / *TemplatePanel* / *Attach...* Esta

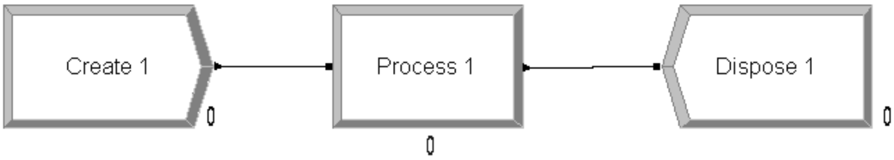


Figura 6.1: Diagrama de módulos inicial.

El modelo está compuesto de una instancia de cada una de las tres clases de módulos de flujo siguientes: "Create", "Process" y "Dispose". Para añadir una instancia de un módulo de flujo al modelo hay que arrastrar el icono del módulo desde el panel hasta la ventana del modelo. La conexión[3] entre los módulos debe realizarse entre un punto de salida de un módulo (conector triangular) y un punto de entrada de otro módulo (conector cuadrado). El diagrama de módulos obtenido se muestra en la Figura 6.1.

Definición de la entidad y de su proceso de llegada

Haciendo doble "clic" sobre el módulo "Create" del modelo pueden visualizarse el valor por defecto de sus parámetros y modificarlos. Los valores modificados se muestran en la Figura 6.2. Si una vez definidos los parámetros del módulo "Create", se hace "clic" sobre el módulo de datos "Entity", en el panel "Basic Process", se comprueba que efectivamente el tipo de entidad "pieza" ha sido dado de alta en el modelo.

Definición del proceso

La definición del proceso incluye especificar (ver Figura 6.3):

- El tipo de acción que realiza la entidad. En este caso, cuando el recurso queda libre la entidad lo captura ("Seize"), espera ("Delay") durante el tiempo que lleva hacer el taladro y finalmente libera ("Release") el recurso.
- Si la acción requiere un recurso, debe definirse el nombre del recurso y el número de recursos que captura la entidad. En este caso, se define el recurso *perforadora*. Para definir un nuevo recurso debe pulsarse el botón "Add" en la ventana de diálogo del modulo "Process". El número de recursos que captura la entidad (Quantity) es 1.
- La distribución de probabilidad del paso de espera (Delay) de la acción (triangular, con rango entre 1 y 6 minutos, y modo 3 minutos), y el concepto al que se asigna este tiempo: "Value Added".

---

opción hace que se abra una ventana de diálogo, en la que debe seleccionarse el fichero correspondiente al panel que se desea añadir. Por ejemplo, para añadir el panel "Basic Process", hay que seleccionar el fichero *BasicProcess.tpo* y pulsar el botón "Abrir". Otra forma equivalente de añadir (attach) y eliminar (detach) paneles es pinchando sobre la barra de proyecto, haciendo clic con el botón derecha y seleccionando la opción deseada.

Si se desea que un determinado panel se añada por defecto en la barra de proyecto al arrancar Arena, puede hacerse seleccionando: *Tools / Options...* Se abre una ventana de diálogo. Pinchar en la lengüeta "Settings". En la parte inferior de la ventana, en la caja "Auto Attach Panels", debe escribirse el nombre de los ficheros *.tpo* que se desea cargar por defecto.

[3]**Alineación y conexión de los módulos.** Al pinchar un módulo de un panel y arrastrarlo a la ventana del modelo se crea una instanciación de esa clase de módulo en el modelo. Para facilitar la alineación de los objetos en la ventana del modelo, hay que activar, antes de arrastrar los módulos, *View / Snap*.

La conexión entre los módulos puede realizarse automáticamente o manualmente. Activando *Object / Auto_Connect*, el nuevo módulo se conecta automáticamente con el módulo que en ese momento se encuentre seleccionado en la ventana del modelo. Si está activo *Object / Smart Connect*, las conexiones se representan mediante líneas rectas horizontales y verticales. La conexión entre los módulos puede hacerse también manualmente, mediante: *Object / Connect*

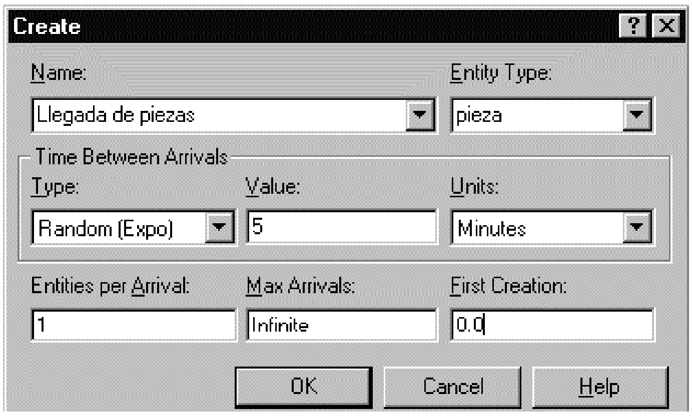


Figura 6.2: Ventana de diálogo del módulo "Create".

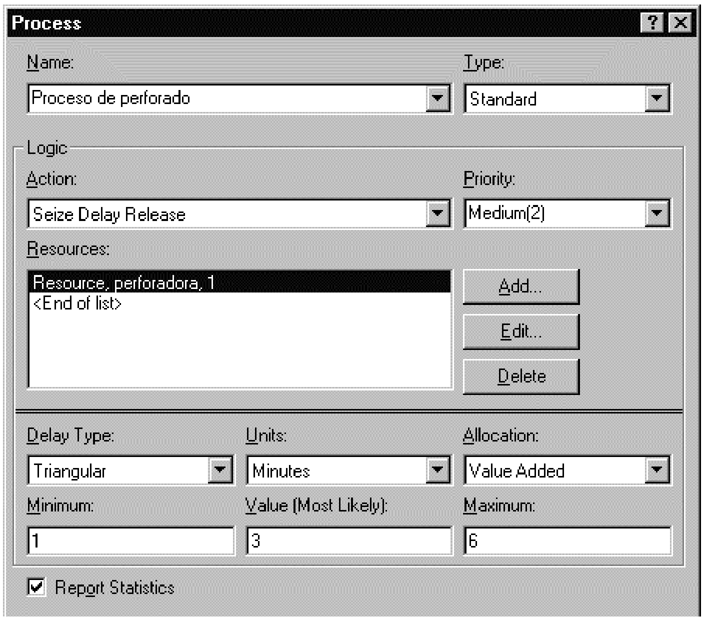


Figura 6.3: Ventana de diálogo del módulo "Process".

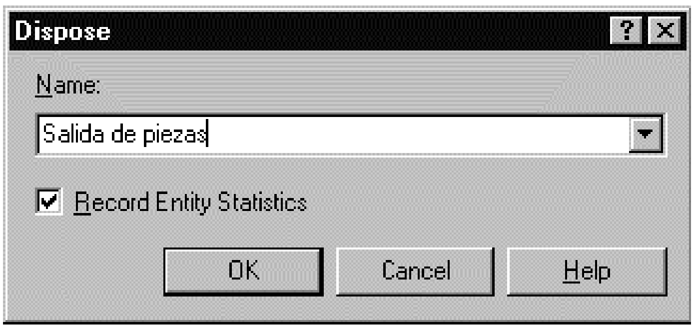


Figura 6.4: Ventana de diálogo del módulo "Dispose".

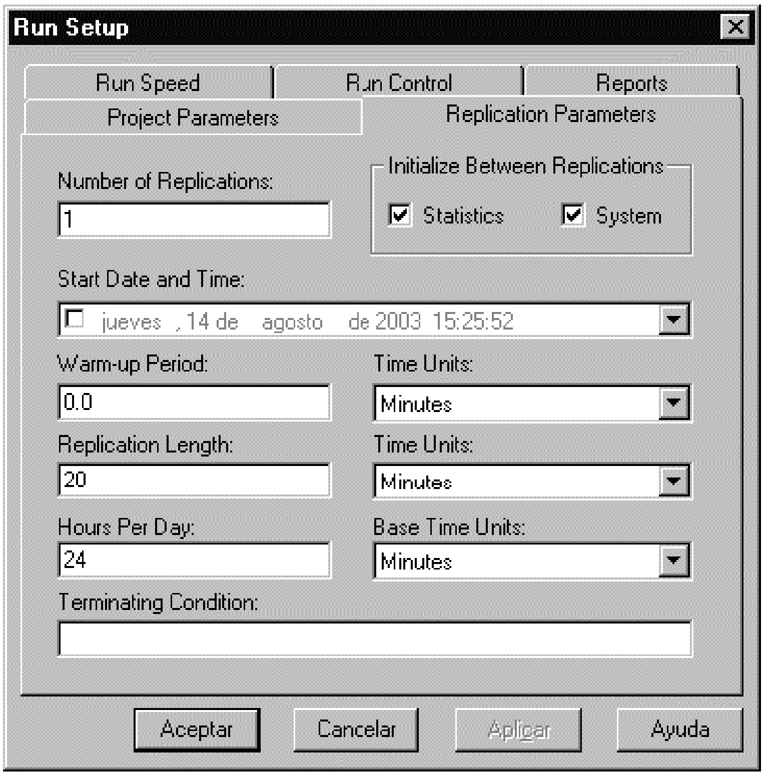


Figura 6.5: Parámetros que definen las réplicas del experimento.

Salida de entidades del sistema

Haciendo doble “clic” sobre el módulo “Dispose” del modelo se abre una ventana de diálogo en la que puede cambiarse el único parámetro del módulo: su nombre (ver la Figura 6.4).

Definición del experimento

Para establecer las condiciones experimentales hay que seleccionar la opción *Run / Setup*. Seleccionando las distintas lengüetas pueden configurarse los diferentes aspectos del experimento:

- *Parámetros del proyecto*: título del proyecto, nombre del analista y estadísticos que deben reportarse al finalizar la simulación. Para este estudio es necesario seleccionar: “Entities”, “Resources”, “Queues” y “Processes”.
- *Parámetros de las réplicas del experimento*. En este estudio se va a realizar una única réplica de longitud 20 minutos. Las unidades de tiempo que deben emplearse en la simulación (“Base Time Units”) son minutos. La ventana de dialogo se muestra en la Figura 6.5.

Simulación

Para iniciar la ejecución del experimento hay que pulsar *Run / Go*.

Interpretación de los resultados

Los resultados se encuentran recogidos en un fichero que se crea al finalizar la simulación, que tiene el mismo nombre que el modelo y extensión *.out*. Estos mismos resultados se encuentran también disponibles en el panel "Reports". Los resultados de interés en este problema son los siguientes:

- Número total de piezas procesadas:

  "Proceso de perforado Number Out" = 5.0000
- Tiempo promedio de espera en la cola:

  "Average" de "Proceso de perforado.WaitTimePerEntity" = 3.0340
- Tiempo máximo de espera en cola:

  "Maximum" de "Proceso de perforado.WaitTimePerEntity" = 8.1598
- Número medio de piezas esperando en la cola:

  "Average" de "Proceso de perforado.Queue.NumberInQueue" = 0.78890
- Tamaño máximo de la cola:

  "Maximum" de "Proceso de perforado.Queue.NumberInQueue" = 3.0000
- Tiempo de ciclo medio:

  "Average" de "pieza.TotalTime" = 6.4396
- Tiempo de ciclo máximo:

  "Maximum" de "pieza.TotalTime" = 12.618
- Utilización de la máquina perforadora:

  "Average" de "perforadora.Utilization" = 0.91709

Dado que en este ejemplo no se ha asignado tiempo a los conceptos "Non-Value Added", "Transfer" y "Other", el tiempo de ciclo ("pieza.TotalTime") se ha desglosado en los dos conceptos siguientes:

- El tiempo dedicado al concepto "Value Added", que corresponde con el tiempo invertido por la perforadora en taladrar las piezas: "pieza.VATime".
- El tiempo dedicado al concepto "Wait", que es el tiempo en cola.

Obsérvese que el reparto de tiempo entre estos dos conceptos, en valor medio es: "pieza.VATime" = 3.4056 y "pieza.WaitTime" = 3.0340. Es decir, el valor medio del tiempo de espera en cola supone aproximadamente el 47 % del tiempo de ciclo.

Problema 6.2

Realizar el estudio de simulación descrito a continuación[4]*, usando para ello el entorno de modelado Arena.*

Parte A. *El modelo representa el final del proceso de fabricación de un circuito electrónico: su montaje en el interior de una carcasa metálica y la realización de pruebas eléctricas para determinar si el dispositivo, una vez encapsulado, funciona correctamente. Si bien se trata de un único tipo de dispositivo electrónico, éste puede encapsularse de dos maneras: usando la carcasa "Tipo A" o usando la carcasa "Tipo B".*

El flujo del modelo, representado en la Figura 6.6, es el siguiente:

- *Las carcasas metálicas, ya preparadas para alojar el circuito en su interior, llegan al sistema. Las carcasas de Tipo A llegan de una en una, mientras que las de Tipo B llegan en grupos de 4. Los intervalos de tiempo entre llegadas sucesivas están distribuidos exponencialmente, con media 5 minutos y 30 minutos respectivamente.*
- *Al llegar al sistema, las carcasas deben recibir cierto tratamiento (pulido de los bordes, limpieza, etc.) en la Zona de Preparación. El tratamiento y el recurso que lo realiza dependen del tipo de carcasa:*

[4]Este estudio de simulación está extraído del texto (Kelton et al. 2002).

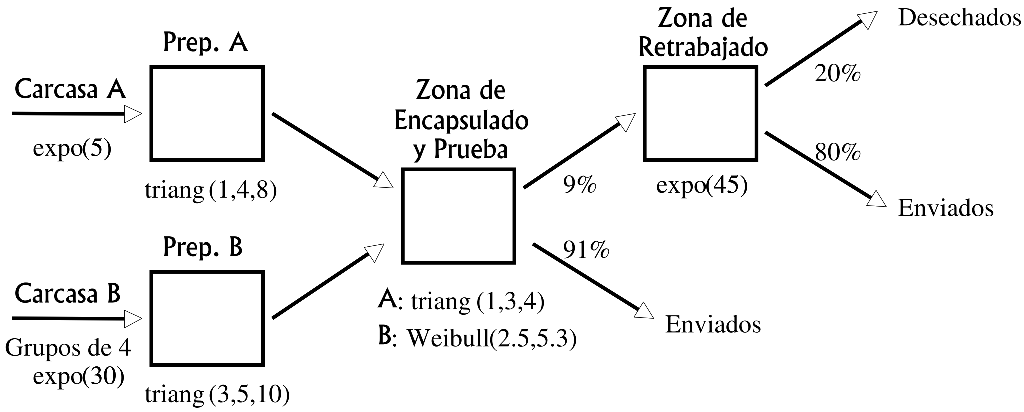


Figura 6.6: Sistema de ensamblado y prueba de circuitos electrónicos.

- *En la Zona Prep. A se preparan las carcasas de Tipo A. El tiempo de proceso está distribuido triangularmente, con rango entre 1 y 8 minutos y modo igual a 4 minutos.*
- *En la Zona Prep. B se preparan las carcasas de Tipo B. El tiempo de proceso está distribuido triangularmente, con rango entre 3 y 10 minutos, y modo 5 minutos*

En ambos casos, las carcasas son procesadas una a una. En particular, las carcasas de Tipo B, que son recibidas en grupos de cuatro, son separadas y procesadas individualmente.

- *Una vez concluido el proceso de preparación, las carcasas de ambos tipos van a la Zona de Encapsulado y Prueba. El proceso en esta zona consiste en introducir el circuito dentro de la carcasa, cerrar y sellar ésta y probar eléctricamente el dispositivo. La distribución de probabilidad del tiempo empleado en este proceso depende del tipo de carcasa. Para las de Tipo A está distribuido triangularmente, con rango de 1 a 4 minutos y con 3 minutos de modo. EL tiempo de proceso de los dispositivos con carcasa Tipo B está distribuido Weibull, con $\alpha = 2.5$ minutos y $\beta = 5.3$ minutos.*
- *EL 91 % de los dispositivos pasa las pruebas eléctricas y son enviados. Se asume que la probabilidad de fallo de un dispositivo es independiente de probabilidad de fallo de los demás dispositivos. Los dispositivos fallados son enviados a la Zona de Retrabajado.*
- *En la Zona de Retrabajado los circuitos son extraídos de las cajas, reparados, vueltos a encapsular y probados de nuevo. El 80 % de los dispositivos retrabajados pasan con éxito este nuevo test y son enviados. El 20 % restante no consigue ser reparado y es desechado. Se considera que el tiempo del proceso del retrabajado es independiente del tipo de carcasa y de si finalmente se consigue reparar el dispositivo o no. El tiempo de retrabajado está distribuido exponencialmente, con media 45 minutos.*

La cadena de encapsulado opera durante 2 turnos al día, de 8 horas cada uno. Se considera que el funcionamiento en ambos turnos es similar, con lo cual el modelo no depende del turno. Asimismo, puesto que las condiciones al comienzo de un turno son las mismas que al finalizar el turno anterior, puede realizarse la simulación sin solución de continuidad entre turnos.

Condiciones iniciales: todas las colas están vacías y todos los recursos libres. Condición de finalización: la duración de la simulación será 4 turnos, de 8 horas/turno (es decir, 1920 minutos).

El objetivo del estudio es estimar los estadísticos siguientes:

- *La utilización de los recursos.*
- *El tamaño medio de cada cola.*
- *El tiempo medio en cada cola.*

- *Los tiempos de ciclo de los dispositivos enviados sin retrabajar, de los retrabajados y de los dispositivos desechados.*

Parte B. *La cadena de encapsulado de la Parte A del problema opera durante 2 turnos al día, de 8 horas cada uno, que eran totalmente equivalentes entre sí. Ahora se supone que la operación de la Zona de Retrabajado cambia de un turno a otro: en el primer turno trabaja un solo operario, mientras que en el segundo turno trabajan dos. Repetid el estudio de simulación del problema anterior, introduciendo esta modificación en el modelo y ampliando el periodo de estudio a 10 días. El objetivo es estimar:*

- *El tiempo medio en la cola del recurso de retrabajado.*
- *Los tiempos de ciclo de los dispositivos enviados sin retrabajar, de los retrabajados y de los dispositivos desechados.*

Parte C. *De cuando en cuando el recurso de la Zona de Encapsulado y Prueba se estropea. De los datos recogidos, se hace la hipótesis de que el intervalo de tiempo entre fallos consecutivos está distribuido exponencialmente, con media 120 minutos. El tiempo requerido para arreglar la avería es también una variable aleatoria, distribuida exponencialmente con media 4 minutos. Ampliad el modelo de simulación de la Parte B, de modo que contemple este tipo de averías, y empleadlo para realizar el estudio descrito a continuación. El estudio tiene los objetivos siguientes:*

- *Obtener información acerca del tiempo que el recurso de la Zona de Encapsulado y Prueba pasa fuera de servicio.*
- *Se planea comprar estanterías para almacenar ordenadamente los dispositivos que están en cola en la Zona de Retrabajado. La capacidad de cada estantería es de 10 dispositivos. Se pretende determinar cuántas de ellas es preciso comprar. Para ello, se desea estimar mediante simulación durante cuánto tiempo el número de dispositivos en cola es cero, durante cuánto tiempo es mayor que cero y menor o igual que 10, durante cuánto tiempo es mayor que 11 y menor o igual que 20, y así sucesivamente.*
- *Obtener información acerca de la utilización de los recursos del modelo.*

SOLUCIÓN Parte A

Para llevar a cabo el estudio de simulación, puede seguirse la secuencia de pasos siguiente.

Diagrama de módulos

El objetivo es decidir qué módulos de Arena son precisos para representar la operación del sistema con el nivel de detalle requerido.

En el modelo existen dos tipos de entidad: carcasa Tipo A y carcasa Tipo B, y pueden diferenciarse las partes siguientes:

- Un punto de llegada de carcasas Tipo A y otro de llegada de carcasas Tipo B (dos módulos “Create”, uno para cada tipo de entidad).
- Una Zona de Preparación para cada tipo de carcasa (módulos “Process”).
- Zona de Encapsulado y Prueba.
- Zona de Retrabajado.
- Dos puntos de bifurcación en el flujo de entidades (módulos “Decide”), correspondientes a las pruebas eléctricas tras el encapsulado y tras el retrabajado.
- Tres puntos de salida de carcasas: envío sin retrabajar, envío con retrabajo y desecho (módulos “Dispose”).

A cada entidad que llega al sistema es preciso asignarle dos atributos:

- *Su instante de llegada.* Arena calcula por defecto el tiempo de ciclo de cada tipo de entidad, es decir, por una parte el de las carcasas Tipo A y por otra el de las carcasas Tipo B. Sin embargo, el dato que se necesita calcular en este estudio no es ese. Se desea estimar, para cada tipo de carcasa, el tiempo de ciclo de cada uno de los tres

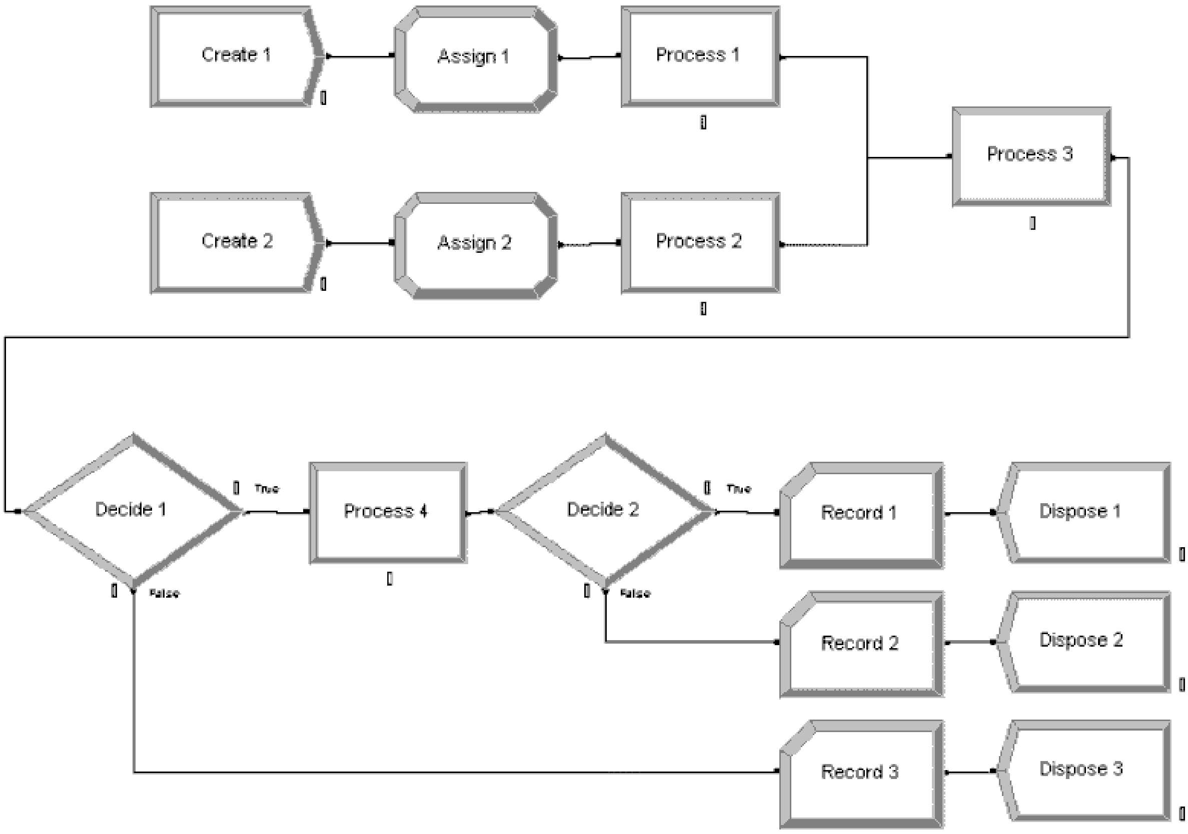


Figura 6.7: Diagrama de módulos inicial.

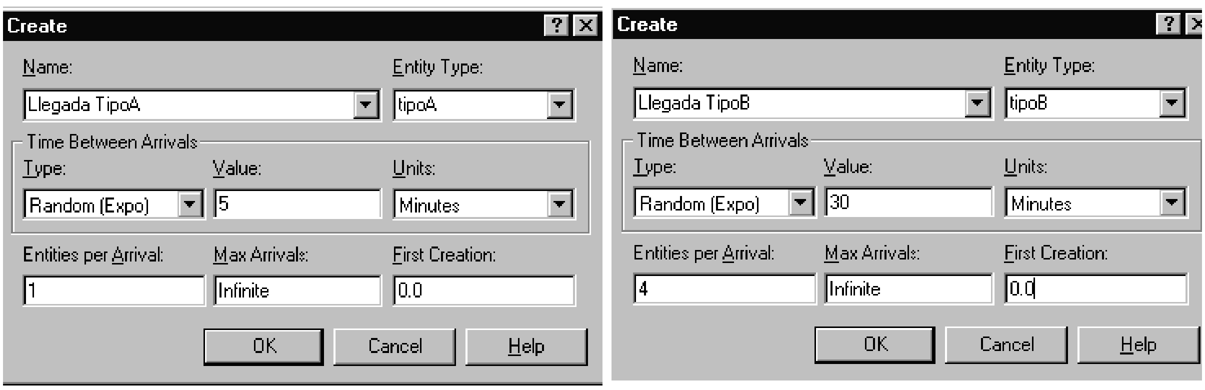


Figura 6.8: Definición de las entidades y de sus procesos de llegada.

caminos de fabricación por separado: enviadas no retrabajadas, enviadas retrabajadas y desechadas. Arena no realiza este cálculo por defecto, con lo cual es preciso indicar en el modelo cómo debe realizarse.

La forma de hacerlo es asignar a cada entidad un atributo: su instante de llegada. El valor de este atributo se usará, en el momento en que la entidad abandona el sistema, para realizar el cálculo del tiempo de ciclo. Situando tres puntos diferentes de cálculo, uno al final de cada camino de fabricación, se obtendrán los tres tiempos de ciclo para cada tipo de carcasa.

- *Su tiempo de proceso en la Zona de Encapsulado y Prueba.* La distribución de probabilidad del tiempo de proceso en esta zona depende del tipo de entidad, pero en el módulo de proceso no es posible establecer esta distinción. La forma de resolver este problema es asignar a cada entidad su valor de tiempo de proceso en el instante en que entra al sistema. Este valor, que se almacena como un atributo, es leído cuando la entidad llega al proceso de Encapsulado y Prueba, y usado en consecuencia: se hace que el tiempo de la acción "Delay" de cada entidad en el proceso sea igual al valor almacenado en el atributo.

La asignación de valor a los atributos de las entidades se hace en los módulos "Assign". Por ello, es preciso insertar un módulo "Assign" a la salida de cada uno de los módulos "Create".

Para calcular los tres tiempos de ciclo es necesario insertar tres módulos "Record" justo antes de que las entidades abandonen el sistema: conectados a la entrada de los bloques "Dispose".

En la Figura 6.7 se muestra el diagrama de módulos del modelo.

Definición de las entidades y de sus procesos de llegada

Haciendo doble "clic" sobre el módulo "Create 1", se abre una ventana de diálogo en la cual se puede definir:

- El nombre del proceso: "Llegada TipoA".
- Tipo de entidad: "tipoA".
- Intervalo de tiempo entre llegadas distribuido exponencialmente, con media 5 minutos.
- Las entidades llegan de una en una.

Análogamente se define el tipo de entidad "tipoB", y su proceso de llegada, según se muestra en la Figura 6.8. Haciendo "clic" sobre el módulo de datos "Entity", en el panel "Basic Process", se comprueba que han quedado definidos los dos tipos de entidad.

Definición de los atributos de las entidades

A cada entidad que llega al sistema se le deben asignar los dos atributos siguientes:

- Si instante de llegada: *tLlegada*.
- Su tiempo de proceso en la Zona de Encapsulado y Prueba: *tProc*.

Los nombres de los atributos pueden escogerse libremente. Haciendo doble "clic" sobre el módulo "Assign 1", se abre una ventana de diálogo en la cual debe definirse:

- El nombre del proceso de asignación, que puede escogerse libremente.
- Las asignaciones ("Assignments") a realizar en el módulo. Para definir una asignación debe pulsarse el botón "Add". En la ventana que se abre (Assignments), debe definirse:
  - El tipo ("Type") de lo que se va a definir. En este caso es un atributo, con lo cual se selecciona "Attribute".
  - El nombre de lo que se va a definir: *tProc*.
  - El valor que debe asignarse, en este caso una distribución de probabilidad triangular, con rango entre 1 y 4 y modo 3. Para ello hay dos posibilidades:
    1. Teclear directamente la expresión, consultando para ello el Apéndice A de la guía "Arena Standard, User's Guide". La sintaxis es TRIA(Min,Mode,Max), con lo cual hay que teclear en la casilla "New Value": TRIA(1,3,4).

2. Construir la expresión con ayuda del *Constructor de Expresiones*. Pulsando el botón derecho del ratón sobre la casilla "New Value" se despliega un menú, desde el cual puede arrancarse el Constructor de Expresiones seleccionando "Build Expression". Para seleccionar la expresión, en la ventana del Constructor de Expresiones hay que desplegar "Random Distributions" y seleccionar "Triangular". Aparecen las casillas para introducir los valores de los parámetros de la distribución: Minimum Value, Most Likely Value y Maximum Value. Estos son 1, 3 y 4 respectivamente. Pulsando OK se cierra la ventana del constructor de ecuaciones, quedando la expresión reflejada en la ventana Assignments: TRIA(1,3,4).

Análogamente se define el atributo "instante de llegada": *tLlegada*. Hay que pulsar de nuevo "Add" en la ventana del módulo "Assign 1" y añadir la definición de este nuevo atributo. El nombre que tiene el reloj de la simulación en Arena puede, o bien consultarse en la guía "Variables Guide" (ver apartado "Current and final simulation time variables"), o bien averiguarlo empleando el Constructor de Expresiones. Si se opta por esta última opción, hay que desplegar "Date and Time Functions" y seleccionar "Current Simulation Time". La expresión mostrada en la casilla "Current Expression" es *TNOW*, que es el nombre del reloj de la simulación de Arena.

De la misma forma se definen los atributos del módulo "Assign 2". En la Figura 6.9 se muestran las ventanas de diálogo de los dos módulos de asignación.

Procesos en las Zonas de Preparación

La definición de un proceso consiste básicamente en definir:

- El tipo de acción que realiza la entidad, que en este caso es "Seize-Delay-Release": cuando el recurso queda disponible la entidad lo captura ("Seize"), la entidad espera ("Delay") mientras el recurso realiza las acciones sobre ella y a continuación la entidad libera ("Release") el recurso.
- El nombre del recurso, que puede escogerse libremente[5], y también es preciso definir la capacidad del recurso ("Quantity") que capta la entidad en la fase "Seize".
- La distribución de probabilidad del tiempo en la fase "Delay" de la acción. En las dos zonas de preparación el tiempo está distribuido triangularmente, con diferentes valores del rango y el modo en cada caso.
- Bajo qué concepto desea contabilizarse el tiempo que la entidad pasa en la fase "Delay" de la acción. En este caso: *Value Added*.

En la Figura 6.10 se muestra la ventana de diálogo de la Zona de Preparación de las carcasas Tipo A. El proceso de la otra Zona de Preparación se define de forma completamente análoga.

Proceso de Encapsulado y Prueba

La acción que realiza la entidad es "Seize-Delay-Release", con la particularidad de que el tiempo que dura la fase "Delay" debe ser igual al valor del parámetro *tProc* de la entidad. La forma de indicar esto en la ventana de diálogo del proceso es seleccionar "Expression" en la casilla "Delay Type". En la casilla "Expression" debe teclearse el nombre del atributo de la entidad: *tProc*. Ver la Figura 6.11.

El resultado de la prueba que sigue al proceso encapsulado implica una bifurcación en el flujo de las entidades, que se modela mediante un módulo "Decide". El tipo de decisión es: *2-way by chance* (es decir, 2 posibilidades por azar). El módulo tiene 2 salidas, marcadas

[5]Al asignar nombre a los objetos debe tenerse en cuenta que:

- El nombre de cada objeto debe ser único: dos objetos no pueden tener el mismo nombre, aun cuando sean de diferente tipo.
- Arena no distingue entre mayúsculas y minúsculas.

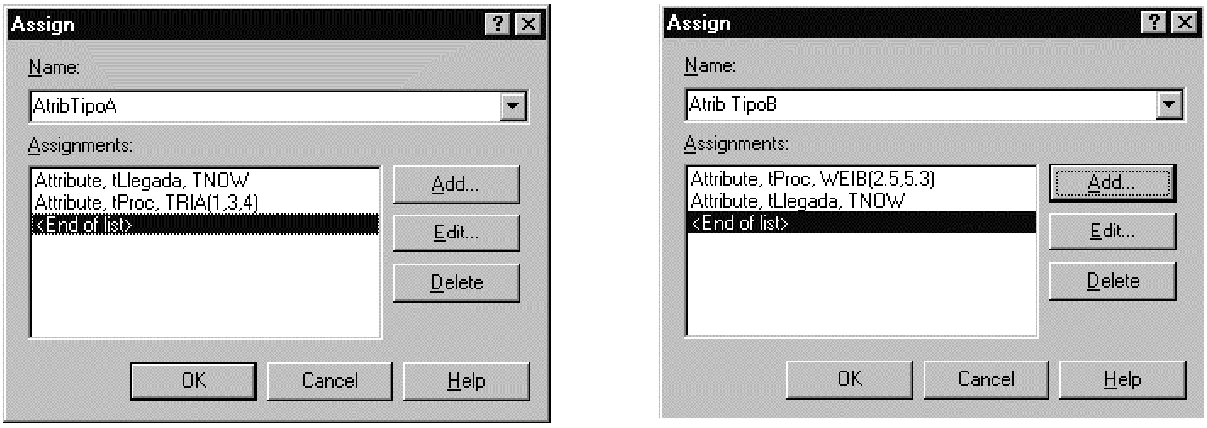


Figura 6.9: Definición de los dos módulos “Assign”.

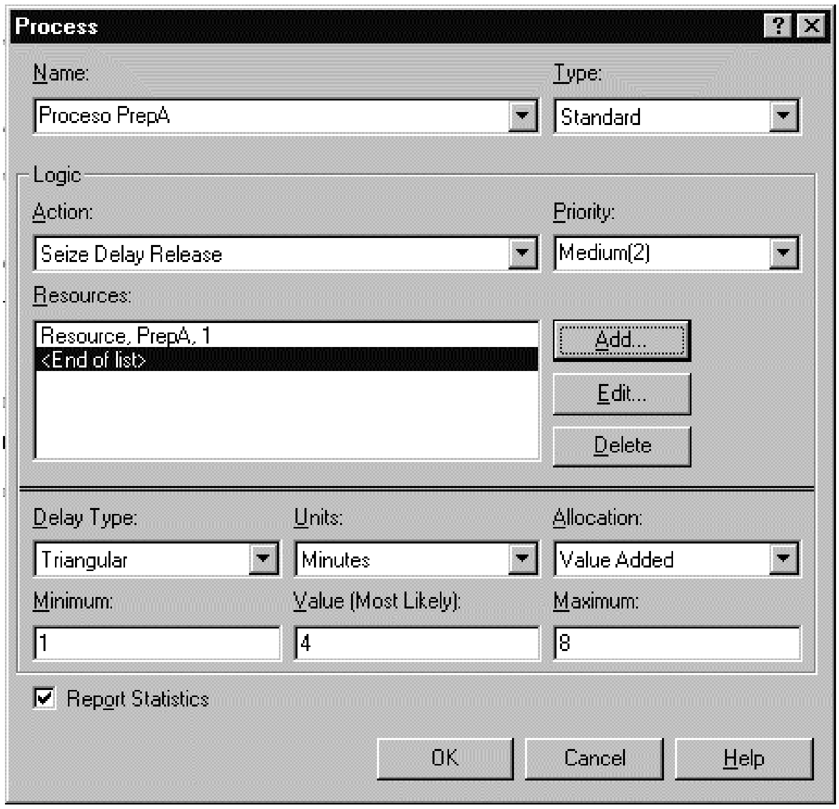


Figura 6.10: Definición del proceso de la Zona de Preparación A.

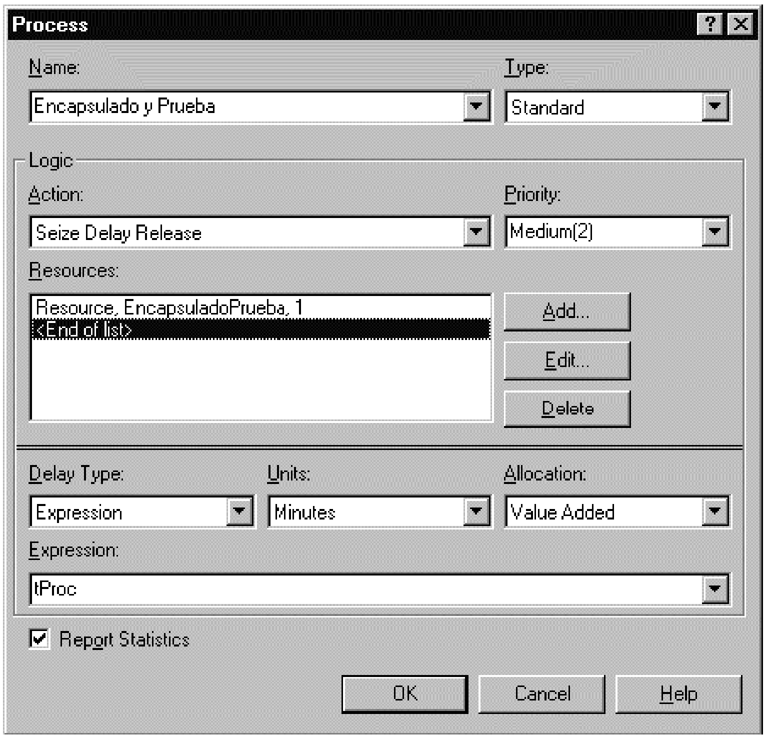


Figura 6.11: Definición del proceso de Encapsulado y Prueba.

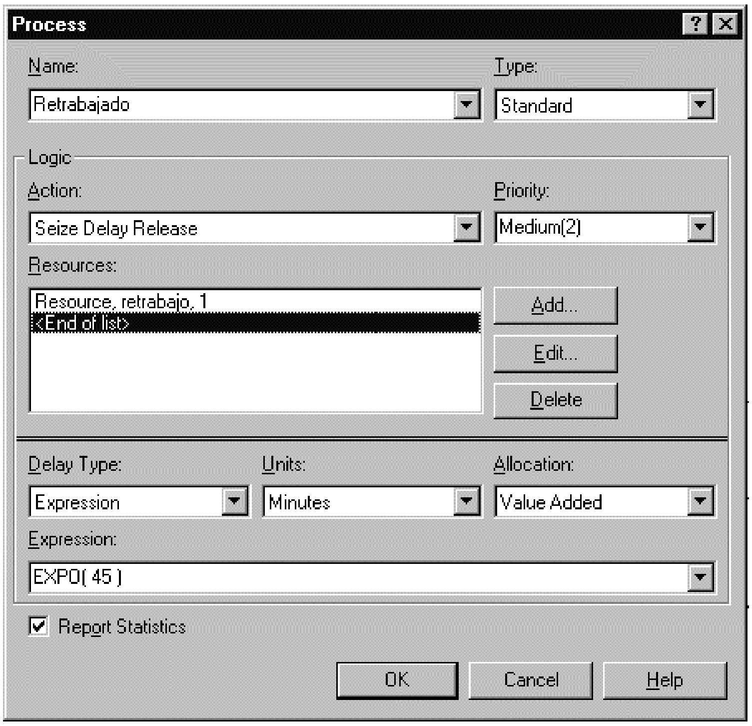


Figura 6.12: Definición del proceso de Retrabajado y Prueba.

respectivamente con las etiquetas "True" y "False". Tal como se ha realizado la conexión del módulo en la Figura 6.7, por la salida "False" deben salir las entidades que no han fallado la prueba, mientras que por la "True" deben salir las que si la han fallado. De acuerdo con esta interpretación, el significado de la bifurcación es: ¿falla la prueba?, y el tanto por cien de probabilidad de la opción "True" es igual a 9.

Proceso de Retrabajado y Prueba

El proceso de la Zona de Retrabajado se define tal como se muestra en la Figura 6.12. La bifurcación en el flujo de las entidades que supone la prueba tras el retrabajado se modela mediante un módulo "Decide". La forma en que está conectado el módulo (ver la Figura 6.7) hace que su interpretación sea: ¿falla la prueba?. El tanto por ciento de probabilidad de la opción "True" es igual a 20.

Configuración de los módulos "Record"

En la sección "Record module" de la guía "Arena Standard, User's Guide" se explica la utilidad del módulo "Record". Su lectura es recomendable para poder seguir las posteriores explicaciones.

Haciendo doble "clic" sobre el módulo "Record 1" se abre una ventana en la cual deben definirse los cálculos a realizar. En la casilla "Type" debe indicarse el tipo de cálculo a realizar. El tipo "Time Interval" calcula y almacena la diferencia entre el valor del atributo especificado en la casilla "Attribute Name" y el valor actual del reloj de la simulación. El resultado del cálculo es almacenado en una estadístico cuyo nombre debe indicarse en la casilla "Tally Name".

En la Figura 6.13 se muestra la definición del registro del tiempo de ciclo de los dispositivos desechados. Los registros del tiempo de ciclo de los dispositivos enviados tras la primera prueba y el de los enviados tras el retrabajo son completamente análogos a éste.

Configuración de los módulos "Dispose"

El motivo de emplear tres módulos "Dispose", en lugar de dirigir los tres flujos de entidades a un único módulo, es poder visualizar el número de entidades que han abandonado el sistema por cada uno de los módulos. Arena muestra el valor de esta variable de animación, en la parte inferior derecha del módulo, si se ha seleccionado la opción "Record Entity Statistics" en la ventana de definición de los módulos "Dispose 1", "Dispose 2" y "Dispose 3".

La definición de los tres módulos Dispose completa la definición del modelo, que es mostrado en la Figura 6.14.

Definición del experimento

Pulsando *Run/Setup* se abre la ventana de diálogo para la configuración del experimento.

- *Condición de finalización*: el reloj de la simulación alcanza el valor 32 horas (Replication Length = 32, Time Units = Hours).
- *Unidad de tiempo base para la simulación*: minutos (Base Time Units = Minutes).
- *Estadísticos que deben ser evaluados*: debe seleccionarse "Entities", "Resources", "Queues" y "Processes".

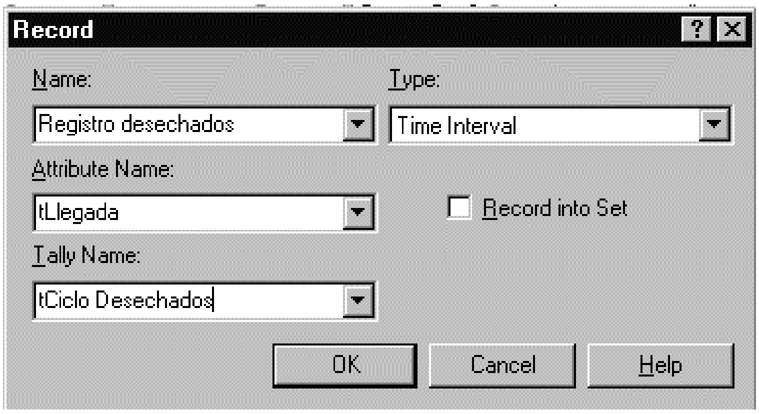


Figura 6.13: Configuración del módulo “Record 1”.

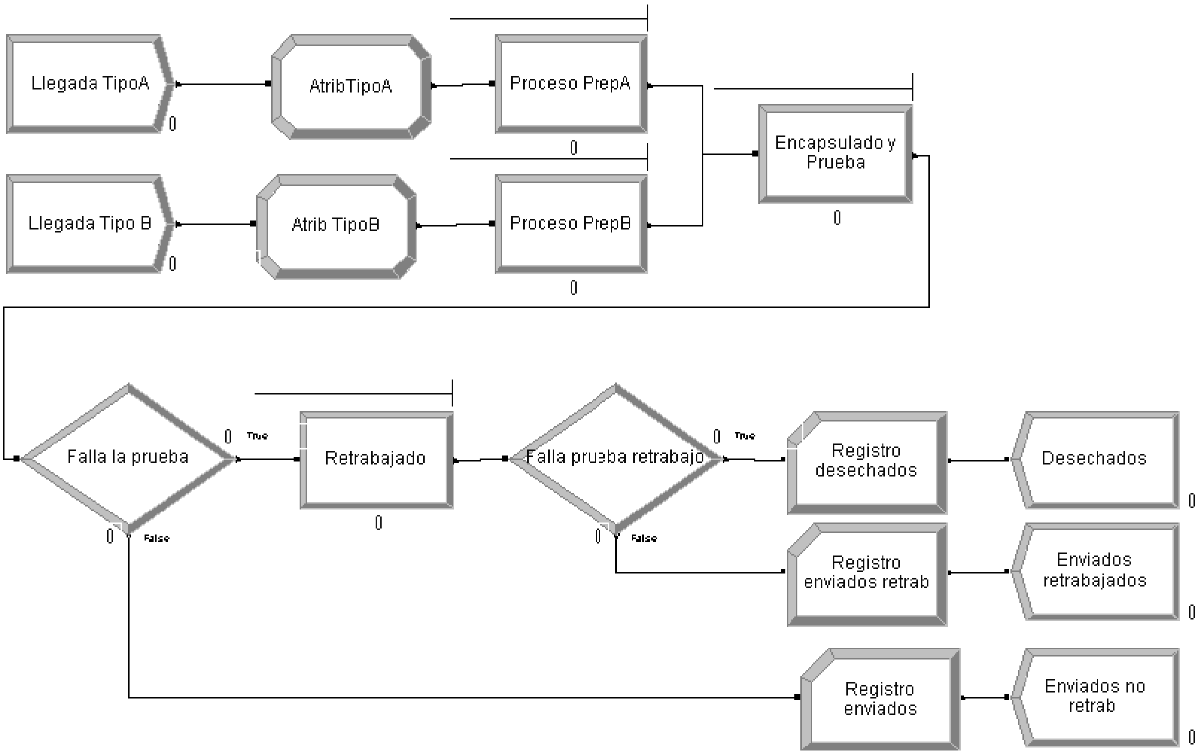


Figura 6.14: Diagrama de módulos del modelo.

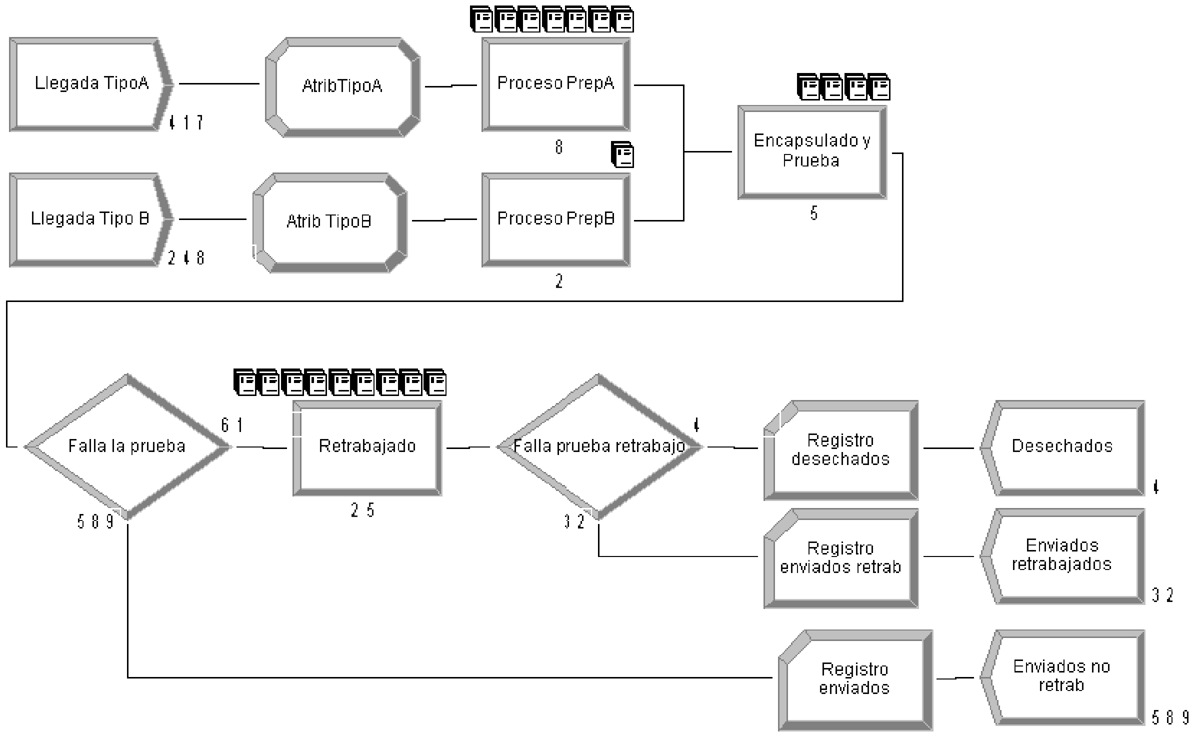


Figura 6.15: Estado final del sistema.

Ejecución de la simulación

Antes de simular el modelo, puede investigarse si contiene errores ejecutando: *Run / Check Model*. Para arrancar la simulación hay que ejecutar: *Run / Go*. El estado del sistema al finalizar la simulación es el mostrado en la Figura 6.15.

La animación resulta a menudo muy útil durante las fases de verificación y validación, ya que permite ver cómo opera el modelo completo. La desventaja de la animación es que ralentiza la ejecución. La forma de deshabilitarla es: *Run / Run Control / Batch Run (No Animation)*.

Al ejecutar la simulación con animación, además de mostrarse el flujo de entidades a lo largo del diagrama de módulos, hay varios *contadores* que van siendo incrementados. Hay un contador por cada módulo "Create", "Process" y "Dispose", y dos contadores por cada módulo "Decide". Los contadores de los módulos "Create", "Dispose" y "Decide" son incrementados cada vez que una entidad abandona el módulo. En el caso de módulo "Process", el contador es el número total de entidades que se encuentran en el módulo.

Interpretación de los resultados

Intentar extraer conclusiones de una única réplica de la simulación es bastante poco riguroso, máxime cuando no se han considerado aspectos tales como la duración de la simulación, el número de réplicas, la conveniencia de realizar la simulación hasta el estacionario, etc.

No obstante, de los resultados de utilización de los recursos (proporción del tiempo que se encuentran ocupados):

Identifier	Average	Half Width	Minimum	Maximum	Final Value
PrepA.Utilization	.90385	.06109	.00000	1.0000	1.0000
PrepB.Utilization	.75753	(Insuf)	.00000	1.0000	1.0000
EncapsuladoPrueba.Utilization	.85949	.04352	.00000	1.0000	1.0000
retrabajo.Utilization	.94954	(Insuf)	.00000	1.0000	1.0000

se observa que la utilización del recurso de la Zona de Retrabajado está próxima al 95 %, y al finalizar la simulación el proceso tiene 24 dispositivos en cola y 1 dispositivo en proceso

Identifier	Average	Half Width	Minimum	Maximum	Final Value
Proceso PrepA.Queue.NumberInQueue	3.1680	(Corr)	.00000	11.000	7.0000
Proceso PrepB.Queue.NumberInQueue	3.5017	(Insuf)	.00000	14.000	1.0000
Retrabajado.Queue .NumberInQueue	12.953	(Insuf)	.00000	26.000	24.000
Encapsulado y Prueba .Queue.NumberInQueue	.86311	.33494	.00000	6.0000	4.0000

A la vista de estos resultados, cabe sospechar que, o bien la Zona de Retrabajado tiene una capacidad insuficiente, o bien el proceso tiene una gran variabilidad. También los tiempos de espera en cola reflejan la congestión del proceso de retrabajado:

Identifier	Average	Half Width	Minimum	Maximum	Observations
Proceso PrepA.Queue.WaitingTime	14.621	(Corr)	.00000	46.345	410
Proceso PrepB.Queue.WaitingTime	26.903	(Insuf)	.00000	85.951	247
Retrabajado. Queue.WaitingTime	456.35	(Insuf)	.00000	810.98	37
Encapsulado y Prueba .Queue.WaitingTime	2.5152	(Corr)	.00000	14.045	651

El tiempo de ciclo, de cada uno de los tres caminos de fabricación, es el siguiente:

Identifier	Average	Half Width	Minimum	Maximum	Observations
tCiclo noRetrab	28.759	(Corr)	3.6795	93.481	589
tCiclo Desechados	737.18	(Insuf)	631.91	829.80	4
tCicloRetr	503.84	(Insuf)	24.977	876.85	32

SOLUCIÓN Parte B

Para *modificar la definición del experimento* debe pulsarse *Run / Setup*. Deben introducirse las siguientes modificaciones (ver la Figura 6.16):

- Especificar que un día laborable consta de 16 horas.

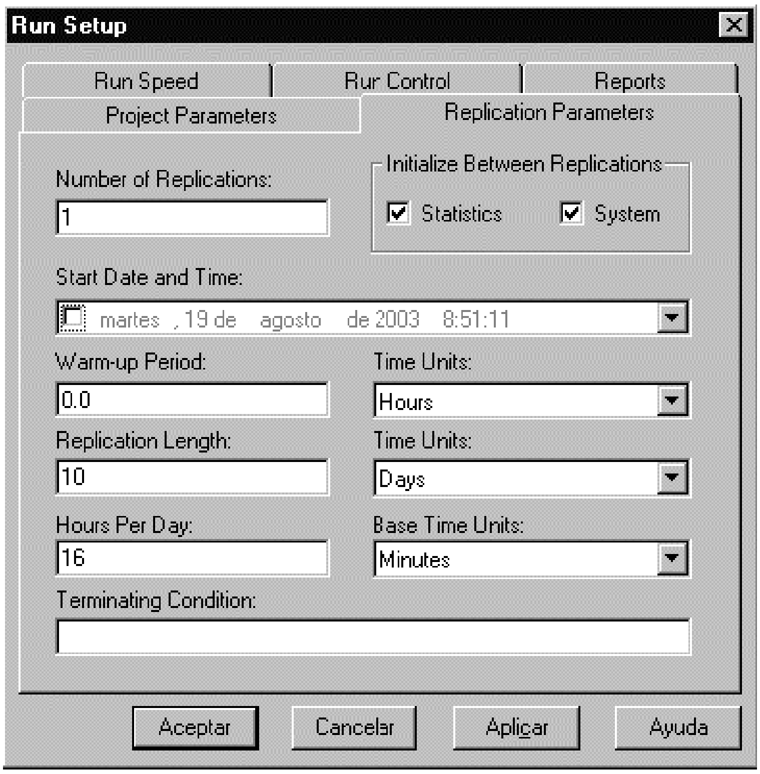


Figura 6.16: Definición del experimento.

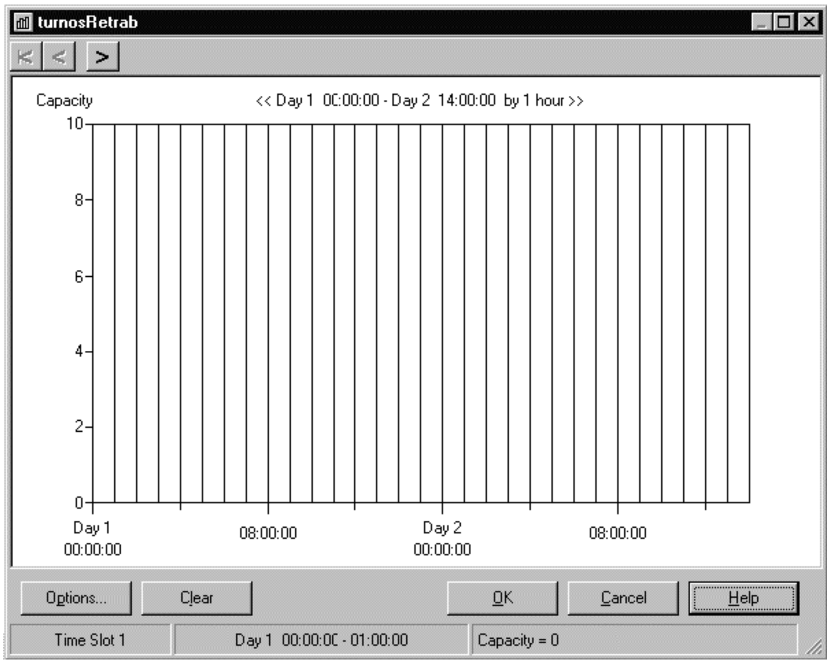


Figura 6.17: Editor gráfico para la planificación de la capacidad.

- Ampliar la duración de la simulación a 10 días.

Los *cambios en la capacidad* del recurso pueden planificarse en el módulo de datos "Resource". Haciendo "clic" sobre este módulo, se muestran los cuatro recursos definidos en el modelo. Las casillas de la columna "Type" de los cuatro recursos contienen la opción por defecto: "Fixed Capacity", es decir, la capacidad se mantiene fija durante la simulación: igual al valor indicado en la correspondiente fila de la columna "Capacity".

Haciendo "clic" sobre la casilla "Type" aparece un menú desplegable, en el que se puede seleccionar "Based on Schedule". Al seleccionar esta opción, Arena añade dos nuevas columnas a la tabla:

- *"Schedule Name"*: nombre que se desea asignar a la planificación de la capacidad. El nombre puede escogerse libremente, por ejemplo: *turnosRetrab*.
- *"Schedule Rule"*: regla determina cómo se producen los cambios en la capacidad del recurso. Existen tres posibilidades: *"Wait"*, *"Ignore"* y *"Preempt"*. Dado que el operario normalmente no deja los dispositivos a medias, sino que termina de procesar el dispositivo en el que está trabajando antes de salir de turno, lo más adecuado en este caso es escoger la regla "Ignore",

Una vez asignado un nombre a la planificación y decidido a qué regla obedece, debe definirse en qué instantes cambia la capacidad del recurso y de qué manera. Esto debe hacerse en el módulo de datos "Schedule". Haciendo "clic" sobre este módulo, en el panel "Basic Process", se observa que efectivamente se ha creado una fila correspondiente a la planificación anteriormente definida: *turnosRetrab*.

Haciendo clic en la casilla correspondiente a la columna "Durations", se abre una interfaz gráfica, en la que debe representarse la evolución de la capacidad en función del tiempo (ver la Figura 6.17). En el eje horizontal se representa el tiempo simulado, en el que el día consta de 16 horas. El eje vertical es la capacidad del recurso. Pulsando el botón "Options" se abre una ventana en la cual:

- pueden configurarse los ejes, y
- se define qué hacer una vez transcurrida la ventana de tiempo de la gráfica ("When at end of schedule"):
  - puede mantenerse la capacidad constante a un valor durante el resto de la simulación ("Remain at capacity ..."), o
  - puede repetirse una y otra vez la planificación a lo largo de la simulación ("Repeat from beginning").

Haciendo "clic" en la posición x-y que corresponde a la hora 1 del día 1, capacidad 1, aparece una barra sólida que representa la capacidad deseada durante esa hora. Repitiendo esta operación, se completa la información correspondiente al primer día. La gráfica se muestra en la Figura 6.18. No es necesario introducir los datos de los restantes días, ya que la planificación del primer día puede repetirse automáticamente los demás días simulados. Para ello debe pulsarse el botón "Options" y seleccionar "Repeat from beginning".

Indicar la evolución de la capacidad por medio del editor gráfico, no permite especificar duraciones que no sean números enteros o entradas que sean una expresión (por ejemplo, un intervalo de longitud aleatoria).

Una forma más flexible que especificar la planificación es hacerlo mediante una ventana de diálogo: "Edit via Dialog". Para ello, hay que hacer "clic" con el botón derecho del ratón sobre la casilla de la columna "Durations", y seleccionar en el menú "Edit via Dialog...". Se abre la ventana "Schedule". Hay que hacer "clic" sobre el botón "Add" para definir, en la ventana "Durations", las parejas (Capacidad, Duración). En este caso, la capacidad permanece a 1 durante las primeras 8 horas y a 2 durante las siguientes 8 horas (ver la Figura 6.19). Tanto la capacidad como la duración puede ser expresiones.

Ejecutando la simulación se obtienen las estimaciones siguientes:

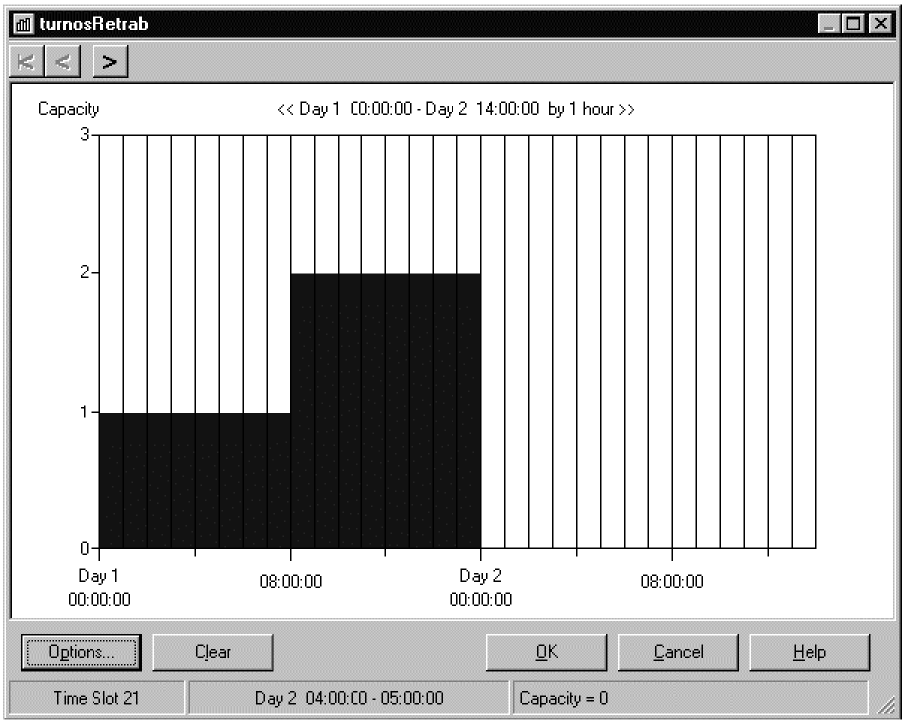


Figura 6.18: Planificación de la capacidad mediante el editor gráfico.

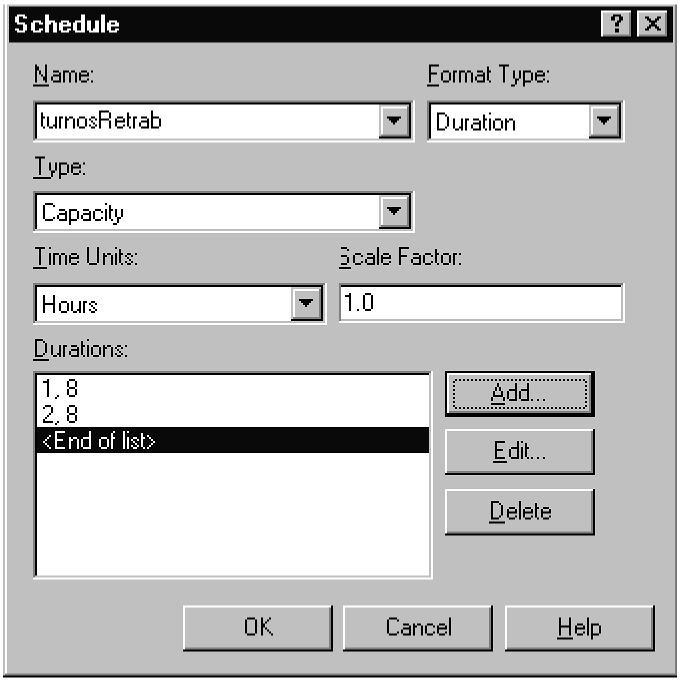
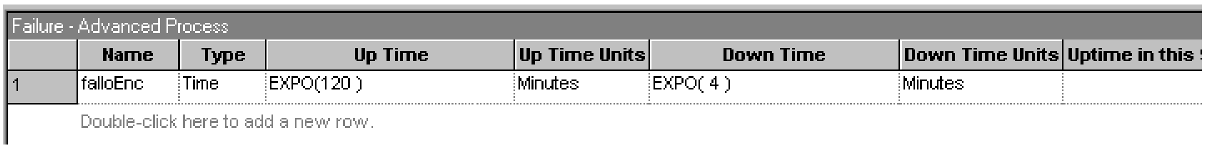


Figura 6.19: Planificación de la capacidad mediante la ventana de diálogo.



Failure - Advanced Process

	Name	Type	Up Time	Up Time Units	Down Time	Down Time Units	Uptime in this
1	falloEnc	Time	EXPO(120)	Minutes	EXPO(4)	Minutes	

Double-click here to add a new row.

Figura 6.20: Definición del tipo de fallo.

Identifier	Average	Half Width	Minimum	Maximum	Observations
Proceso PrepA.Queue.WaitingTime	10.937	(Corr)	.00000	86.718	1874
Proceso PrepB.Queue.WaitingTime	140.22	(Corr)	.00000	434.96	1358
Retrabajado. Queue.WaitingTime	379.06	(Insuf)	.00000	1051.9	306
Encapsulado y Prueba .Queue.WaitingTime	2.5063	.80286	.00000	23.862	3229

Identifier	Average	Half Width	Minimum	Maximum	Observations
tCiclo noRetrab	74.536	(Corr)	2.9182	446.50	2909
tCiclo Desechados	518.50	(Insuf)	159.23	971.60	50
tCicloRetr	509.68	(Insuf)	24.977	1329.2	254

SOLUCIÓN Parte C

EL tipo de fallo puede definirse en el módulo de datos “Failure”, que está situado en el panel “Advanced Process”. Haciendo “clic” sobre el módulo se abre la hoja “Failure - Advanced Process”, que por el momento no tiene ninguna fila. Haciendo doble “clic” en el área bajo la cabecera, donde está escrito “Double-click here to add a new row”, se añade una nueva fila a la tabla, en la cual debe especificarse (ver la Figura 6.20):

- El nombre del tipo de fallo (en la casilla de la columna “Name”). Por ejemplo: *falloEncaps*.
- El criterio para que se produzca un fallo: “Count” o “Time”. En este caso el criterio está basado en el tiempo, con lo cual debe seleccionarse “Time” en la casilla de la columna “Type”.
- Las columnas “Up Time” y “Down Time” representan respectivamente el tiempo que está el recurso funcionando entre dos fallos consecutivos, EXPO(120), y el tiempo que pasa la máquina fuera de servicio, EXPO(4).
- En la última columna, “Uptime in this State only”, se define en qué estado del recurso se considera que la máquina está “Up”. En este caso, de deja la opción por defecto: para contabilizar el tiempo entre fallos se considera tanto el estado libre como ocupada.

Una vez definido el tipo de fallo, *falloEncaps*, hay que asociarlo con el recurso *EncapsuladoPrueba*. Para ello, debe abrirse (haciendo “clic”) el módulo de datos “Resource”, del panel “Basic Process”, y hacer clic sobre la casilla “Failures” de la fila correspondiente a *EncapsuladoPrueba*. Se abre una pequeña ventana, “Failures”, en la que hay que hacer doble “clic” para añadir una nueva fila:

Categories

	Constant or Range	Value	High Value	Category Name	Category Option
1	Constant	0		estanteria 0	Include
2	Range	0	10	estanteria 1	Include
3	Range	10	20	estanteria 2	Include
4	Range	20	30	estanteria 3	Include
5	Range	30	40	estanteria 4	Include

Double-click here to add a new row.

Figura 6.21: Definición de las categorías.

Statistic - Advanced Process

	Name	Type	Frequency Type	Expression	Resource Name	Report Label	Output File	Categories
1	colaRetrabSt	Frequency	Value	NQ(Retrabajado.Queue)		colaRetrabSt		5 rows
2	estadoEncap	Frequency	State	Expression 1	EncapsuladoPrueba	estadoEncap		0 rows

Double-click here to add a new row.

Figura 6.22: Definición de los dos estadísticos.

- En la columna "Failure Name", hay que seleccionar el fallo anteriormente definido: *falloEncaps*.
- En la columna "Failure Rule", debe indicarse la regla a seguir: *"Wait"*, *"Ignore"* o *"Preempt"*. Dado que el tiempo entre fallos (120 minutos) es grande comparado con el tiempo de reparación (4 minutos), es razonable escoger la regla *"Wait"*.

Una vez hechas las modificaciones en el modelo, deben definirse los estadísticos. En primer lugar el estadístico a partir del cual va a estimarse el número de estanterías que es necesario comprar. Haciendo "clic" sobre el módulo de datos "Statistic", se abre la hoja "Statistic - Advanced Process", que inicialmente se encuentra vacía. Tal como aparece indicado en la hoja: "Double-clic here to add new row" (hacer doble "clic" para añadir una nueva fila).

- En la casilla de la columna "Name", debe introducirse el nombre que se asigna al estadístico, el cual puede escogerse libremente. Por ejemplo: *colaRetrabSt*.
- El estadístico, como se ha indicado anteriormente, es de tipo frecuencia: seleccionar "Frequency" en la casilla de la columna "Type". Obsérvese que en la casilla de la columna "Report Label" aparece por defecto el nombre asignado al estadístico.
- La casilla "Frequency Type" debe contener "Value", (en oposición a "State", que sería adecuado si se deseara estudiar el tiempo que el recurso pasa en cada estado).
- En la casilla "Expression" debe introducirse la expresión de la cual se desea estudiar la frecuencia. En este caso, la expresión es el número de dispositivos en cola en la Zona de Retrabajado. Hacer "clic" con el botón derecho del ratón sobre la casilla "Expression" y abrir el constructor de expresiones: seleccionar "Build Expression". Desplegando "Basic Process Variables / Queue", seleccionar "Current Number in Queue". Con ello, aparece una casilla, "Queue Name", en la parte derecha de la ventana del constructor, en la que debe seleccionarse cuál de las colas del modelo debe usarse en la expresión. Seleccionar la correspondiente a la Zona de Retrabajado. Pulsar OK para que la expresión se inserte en la casilla desde la que se ha abierto el constructor.

- Las categorías que determinan cómo deben ser representados los datos, se definen en la casilla “Categories”. Por defecto, la casilla contiene 0 rows. Haciendo “clic” sobre la casilla se abre una pequeña ventana, “Categories”, en la que se introduce la información acerca de las categorías. Se define únicamente hasta 4 estanterías. Si el número de dispositivos en cola superara los 40, Arena automáticamente crearía una nueva categoría: *out-of-range*. En la definición de los rangos, el criterio que sigue Arena es que el extrema inferior no está incluido en el rango. Por ejemplo, el rango Value = 10, High Value = 20, define el rango de números $(10, 20]$, es decir, mayor que 10 y menor o igual que 20. Cerrar la ventana “Categories” pulsando el aspa de la esquina superior derecha. Con ello queda completa la definición del estadístico (ver las Figuras 6.21 y 6.22).

El segundo estadístico debe ser el tiempo total durante el cual el recurso de la Zona de Encapsulado y Prueba está averiado. Para definirlo debe añadirse una nueva fila al módulo de datos “Statistic” tal como se indica en la Figura 6.22.

Ejecutando una réplica de la simulación, los valores obtenidos de los estadísticos son los siguientes:

		–Occurrences–		Standard	Restricted
Identifier	Category	Number	AvgTime	Percent	Percent
colaRetrabSt	estanteria 0	41	69.472	29.67	29.67
	estanteria 1	52	119.95	64.98	64.98
	estanteria 2	12	42.821	5.35	5.35
estadoEncap	BUSY	697	11.604	84.25	84.25
	IDLE	640	1.9172	12.78	12.78
	FAILED	68	4.1860	2.97	2.97

El significado de las variables de los estadísticos de frecuencia puede consultarse en la guía “Arena Variables Guide”, sección “Frequencies statistics variables”:

- *Average time in category* (FAVG). Es el tiempo promedio que la expresión de la frecuencia (es decir, el contenido de la casilla “Expression”, en el módulo de datos “Statistic - Advanced Process”) toma un valor contenido en el rango correspondiente a la categoría. Se calcula, para cada una de las categorías, de la forma siguiente:

$$\text{FAVG} = \frac{\text{FRQTIM}}{\text{FCOUNT}} \tag{6.1}$$

- *Frequency category count* (FCOUNT). Es el número de veces que ocurren observaciones en el rango de una determinada categoría. Es un número entero.
- *Standard category percent* (FSTAND). Calcula el porcentaje de tiempo en la categoría especificada comparado con el tiempo en todas las categorías.
- *Restricted category percent* (FRESTR). Calcula el porcentaje de tiempo en la categoría especificada comparado con el tiempo en todas las categorías restringidas.
- *Time in category* (FRQTIM). Es el tiempo total que el valor de la expresión de la frecuencia está en el rango de una determinada categoría.

En este estudio, “Standard Percent” y “Restricted Percent” tienen los mismos valores. Es posible seleccionar el tipo de dato que se desea excluir del cálculo de la última columna. Por ejemplo, si se excluyen los datos del recurso de encapsulado y prueba cuando éste está en estado FAILED, entonces “Standard Percent” no variaría, pero los cálculos de la columna “Restricted Percent” se calcularían sólo de los estados “BUSY” e “IDLE”, de modo que los valores obtenidos sumarían 100.

Del estadístico definido para determinar el número necesario de estanterías, se observa que durante la simulación el número de entidades en cola del retrabajado nunca supera las 20, y que es mayor que 10 sólo durante el 5.35 % del tiempo. Por consiguiente, de la simulación de deduce que deberían comprarse 2, o a lo sumo 3, estanterías.

La *utilización* y la *utilización planificada* de los recursos son las siguientes:

Identifier	Average	Half Width	Minimum	Maximum	Final Value
PrepA.Utilization	.88686	.02755	.00000	1.0000	1.0000
PrepB.Utilization	.80114	.07366	.00000	1.0000	1.0000
EncapsuladoPrueba.Utilization	.84253	.03300	.00000	1.0000	.00000
retrabajo.Utilization	.86405	(Corr)	.00000	1.0000	1.0000

Identifier	Value
PrepA.ScheduledUtilization	.88686
PrepB.ScheduledUtilization	.80114
EncapsuladoPrueba.ScheduledUtilization	.84253
retrabajo.ScheduledUtilization	.85675

Puede comprobarse, inspeccionando el contenido del fichero *.out*, que la *utilización planificada* (*ScheduledUtilization*) es el cociente de *NumberBusy* entre *NumberScheduled*.

Cuando la capacidad del recurso es fija, la *utilización* y la *utilización planificada* son iguales. En efecto, ambas métricas son iguales para todos los recursos del modelo excepto el de la Zona de Retrabajado.

Problema 6.3

Realizar el estudio de simulación descrito a continuación[6]*, usando para ello el entorno de modelado Arena.*

Parte A. *Los pasajeros llegan a la puerta principal de la terminal de un aeropuerto, y a continuación van al mostrador de facturación. Una vez finalizada la facturación se dirigen a sus puertas de embarque.*

- *El intervalo de tiempo entre llegadas sucesivas de pasajeros a la puerta principal está distribuido exponencialmente, con media 1.6 minutos. Los pasajeros llegan de uno en uno.*
- *El tiempo que tardan los pasajeros en ir de la puerta principal al mostrador de facturación está distribuido uniformemente entre 2 y 3 minutos.*
- *En el mostrador de facturación esperan en una cola FIFO hasta que uno de los 5 empleados quede disponible para atenderles.*
- *El tiempo del proceso de facturación está distribuido (en minutos) Weibull con parámetros* $\beta = 7.76$ *y* $\alpha = 3.91$.

Condiciones iniciales: la cola está vacía y los recursos libres. Condición de finalización: la duración de la simulación será de 16 horas, que es el tiempo diario de funcionamiento del mostrador de facturación. El objetivo del estudio es estimar los estadísticos siguientes:

- *Tiempo promedio de los pasajeros en el sistema.*
- *Número de pasajeros que han completado la facturación durante el tiempo simulado.*
- *Número medio de pasajeros que esperan en la cola del mostrador de facturación.*

[6]Este estudio de simulación está extraído del texto (Kelton et al. 2002).

Parte B. *Los empleados trabajan en turnos de 8 horas. Realizan descansos de 15 minutos de manera escalonada, empezando a los 90 minutos de entrar en el turno. El descanso para la comida dura 30 minutos y también se hace de forma escalonada, empezando a las 3 horas y media de haber comenzado el turno. Repetir el estudio considerando esta modificación en el modelo.*

Parte C. *Repetir el estudio considerando la siguiente modificación en el modelo. Existen dos tipos diferentes de pasajeros:*

- *El primer tipo llega a la puerta principal de acuerdo a una distribución exponencial de media 2.4 minutos y su tiempo de facturación sigue una distribución gamma con parámetros* $\beta = 0.42$ *y* $\alpha = 14.4$ *(expresado en minutos).*
- *El segundo tipo de pasajero llega con una distribución exponencial de media 4.4 minutos y su tiempo de facturación es igual a* $3 + X$ *minutos, donde* X *está distribuido Erlang con parámetros ExpMean* $= 0.54$ *y* $k = 15$.

SOLUCIÓN Parte A

Para llevar a cabo el estudio de simulación, puede seguirse la secuencia de pasos siguiente.

Diagrama de módulos

El diagrama de módulos del modelo se muestra en la Figura 6.23.

- La llegada de pasajeros a la puerta principal de la terminal se representa mediante un módulo "Create".
- A continuación, los pasajeros deben ir desde la entrada hasta el mostrador, lo cual se modela mediante un módulo "Process" con acción "Delay".
- Seguidamente, los pasajeros entran en el proceso *facturacion*, que se representa mediante un segundo módulo "Process". Cada pasajero debe capturar un empleado ("Seize"), esperar a que éste realice las operaciones de facturación ("Delay") y una vez concluidas éstas liberar al empleado ("Release").
- Finalmente los pasajeros abandonan el sistema: módulo "Dispose".

Tipo de entidad y su proceso de llegada

En el modelo existe una única entidad: el pasajero. En la Figura 6.24 se muestra la definición del módulo "Create", en la cual se define el tipo de entidad y su proceso de llegada.

Tránsito de la puerta al mostrador

El tránsito de las entidades de la puerta de la terminal al mostrador de facturación se modela mediante un proceso, sobre el que la entidad ejerce una acción "Delay". Este tipo de acción no precisa recurso. La definición del proceso se muestra en la Figura 6.25. El tiempo del proceso se contabiliza como "Value Added".

Facturación

En el proceso de facturación, la entidad ejerce la acción "Seize-Delay-Release". Esta acción requiere (ver la Figura 6.26):

- La definición de un recurso: el *empleado*. Cada empleado es capturado por una única entidad, por tanto "Quantity" se define igual a 1. Puesto que hay 5 empleados, la capacidad ("Capacity") del recurso es constante ("Fixed Capacity") e igual a 5. Este último dato se introduce haciendo "clic" sobre el módulo de datos "Resource" (ver la Figura 6.27).

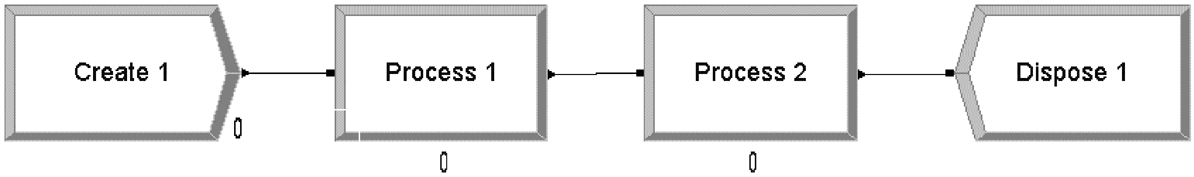


Figura 6.23: Diagrama de módulos inicial.

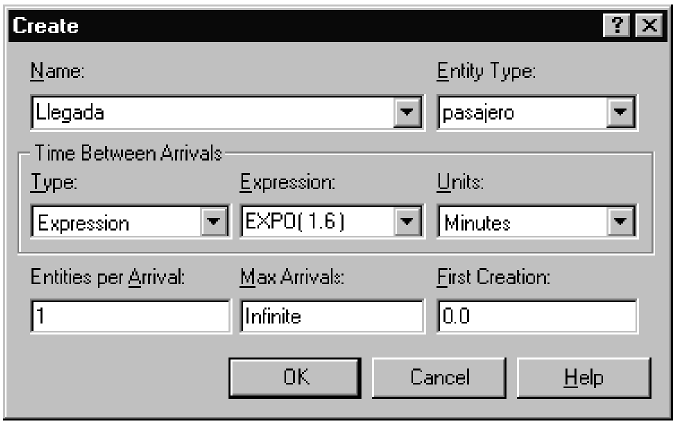


Figura 6.24: Definición del tipo de entidad y de su proceso de llegada.

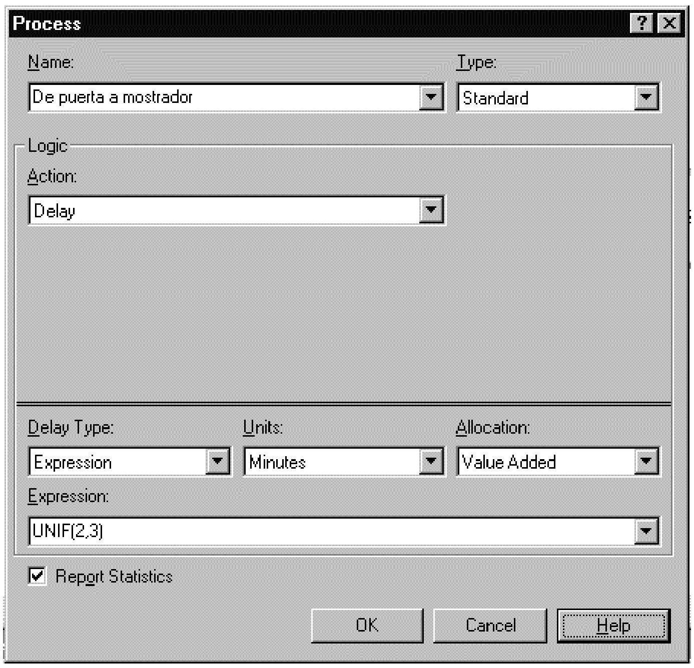


Figura 6.25: Proceso de tránsito de la puerta al mostrador.

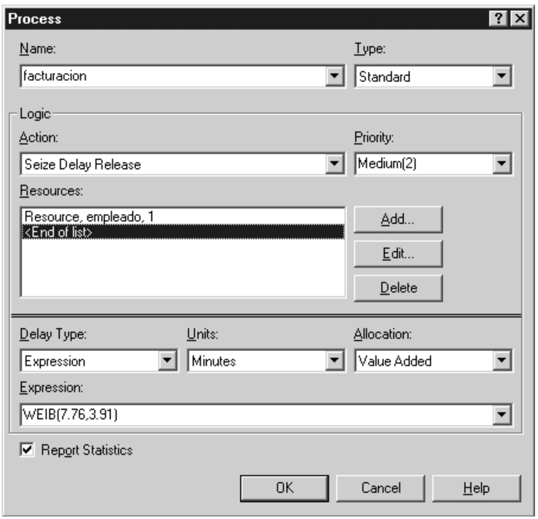


Figura 6.26: Proceso de facturación.

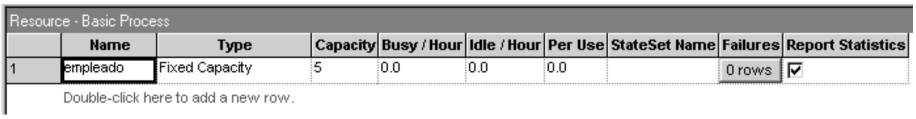


Figura 6.27: Definición de la capacidad del recurso.

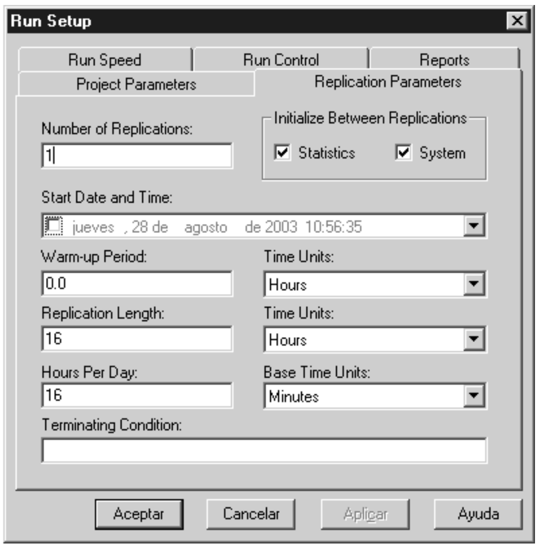


Figura 6.28: Definición del experimento.

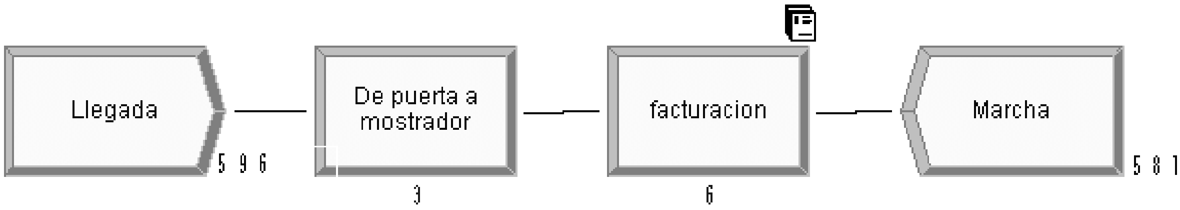


Figura 6.29: Estado final del sistema.

- La distribución de la duración de la fase "Delay" de la acción.

Salida del sistema

Una vez realizado el proceso de facturación, los pasajeros abandonan el sistema. Se modela conectando la salida del proceso de facturación a la entrada del módulo "Dispose". Este tipo de módulo tiene 2 parámetros: su nombre y la posibilidad de habilitar o deshabilitar la inclusión de los estadísticos relacionados en el fichero de salida.

Definición del experimento

Se realiza una única réplica de la simulación, con una duración de 16 horas. La unidad de tiempo base es el minuto. Dado que el mostrador de facturación funciona durante 16 horas al día, se considera que el día consta de 16 horas (ver la Figura 6.28).

Simulación e interpretación de los resultados

En la Figura 6.29 se muestra el estado final del sistema. Consultando el fichero *.out* se obtienen los siguientes resultados:

- Tiempo promedio de los pasajeros en el sistema:

$$\text{Average - pasajero.TotalTime} = 12.878$$

- Número de pasajeros que han completado la facturación durante el tiempo simulado.

$$\text{Value - facturacion Number Out} = 587.00$$

- Número medio de pasajeros que esperan en la cola del mostrador de facturación.

$$\text{Average - facturacion.Queue.NumberInQueue} = 2.2579$$

SOLUCIÓN Parte B

La evolución temporal de la capacidad del recurso del proceso *facturacion* puede planificarse de la forma siguiente:

- En el módulo de datos "Resource" debe indicarse que la capacidad no es fija, sino que está planificada ("Based on Schedule" en la columna "Type"). Asimismo, debe asignarse un nombre a la planificación y definir la regla a seguir en los instantes de reducción de

Resource - Basic Process

	Name	Type	Schedule Name	Schedule Rule	Busy / Hour	Idle / Hour	Per Use	StateSet Name	Failures	Report Statistics
1	empleado	Based on Schedule	turnos	Ignore	0.0	0.0	0.0		0 rows	☑

Double-click here to add a new row.

Figura 6.30: Proceso *facturacion*, con capacidad variable.

Schedule - Basic Process

	Name	Format Type	Type	Time Units	Scale Factor	Durations
1	turnos	Duration	Capacity	Quarterhours	1.0	5 rows

Double-click here to add a new row.

Figura 6.31: Planificación de la capacidad del recurso.

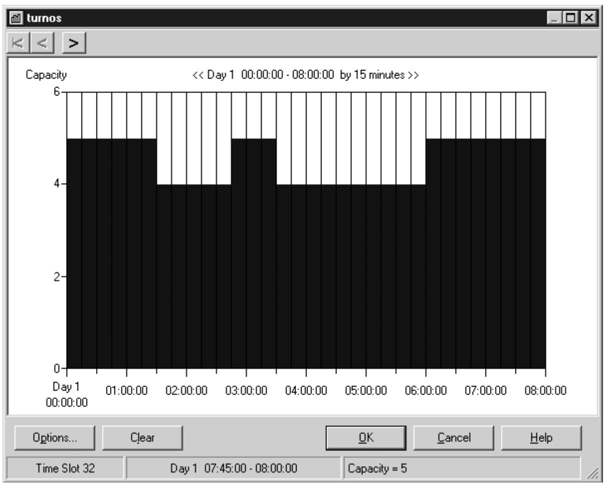


Figura 6.32: Evolución temporal de la capacidad.

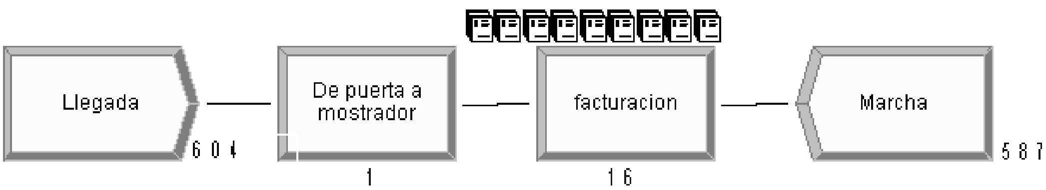


Figura 6.33: Estado final del sistema.

la capacidad. En este caso, la regla más adecuada es "Ignore": los empleados terminan de atender al cliente antes de iniciar su descanso, reduciéndose en consecuencia la duración del mismo. En la Figura 6.30 se muestra el contenido del módulo "Resource" modificado según se ha indicado anteriormente.

- En el módulo de datos "Schedule", debe indicarse cómo evoluciona la planificación, anteriormente definida, en función del tiempo (ver las Figuras 6.31 y 6.32).

  El turno de descanso dura 15 minutos, y comienza a los 90 minutos de iniciado el turno. Por consiguiente, entre el minuto 90 y el $90 + 5 \cdot 15 = 165$, la capacidad del recurso es 4. Resulta más cómodo emplear el cuarto de hora ("Quarterhours") para cuantificar el tiempo al definir la planificación: escoger "Quarterhours" en la casilla de la columna "Time Units". De este modo, durante los 3 primeros cuartos de hora la capacidad es 5, y durante los 5 siguientes cuartos de hora, la capacidad es 4.

  El descanso para la comida comienza a las 3 horas y media (14 cuartos de hora) de iniciado el turno, y se prolonga durante 10 cuartos de hora, tiempo durante el cual la capacidad del recurso es 4.

La simulación se realiza durante 2 turnos de 8 horas, repitiéndose la planificación de la capacidad cada turno. Por este motivo, se define la planificación durante un turno y se selecciona, en la ventana de la Figura 6.32: *Options / When at end of schedule - Repeat from beginning.*

Simulación e interpretación de los resultados

En la Figura 6.33 se muestra el estado final del sistema. Consultando el fichero *.out* se obtienen los siguientes resultados:

- Tiempo promedio de los pasajeros en el sistema:

$$\text{Average - pasajero.TotalTime} = 17.560$$

- Número de pasajeros que han completado la facturación durante el tiempo simulado.

$$\text{Value - facturacion Number Out} = 587.00$$

- Número medio de pasajeros que esperan en la cola del mostrador de facturación.

$$\text{Average - facturacion.Queue.NumberInQueue} = 5.1949$$

SOLUCIÓN Parte C

El diagrama de módulos del modelo se muestra en la Figura 6.34. Existen dos tipos diferentes de pasajero, *pasajeroA* y *pasajeroB*, con procesos de llegada diferentes. La definición de cada tipo de pasajero y de su proceso de llegada se hace en un módulo "Create".

A continuación de cada módulo "Create" se conecta un módulo "Assign", en el que se asigna valor a los atributos de las entidades (ver la Figura 6.35):

- La duración de la fase "Delay" del proceso *facturacion* tiene una distribución diferente para cada tipo de pasajero. En el módulo *facturacion* no es posible hacer esta distinción, por ello este tiempo debe definirse como un atributo de la entidad. El nombre del atributo puede escogerse libremente. Por ejemplo: *tDelayFact*.
- Para estimar el tiempo de ciclo de cada tipo de entidad es preciso definir un atributo que almacene su instante de llegada (por ejemplo: *tLlegada*). Se asigna valor al atributo en un módulo "Assign" conectado justo a continuación del módulo "Create", y se define el cálculo en un módulo "Record" situado justo antes de que las entidades abandonen el sistema.

Realizando la simulación, el estado final del sistema es el mostrado en la Figura 6.36. Los resultados obtenidos son los siguientes:

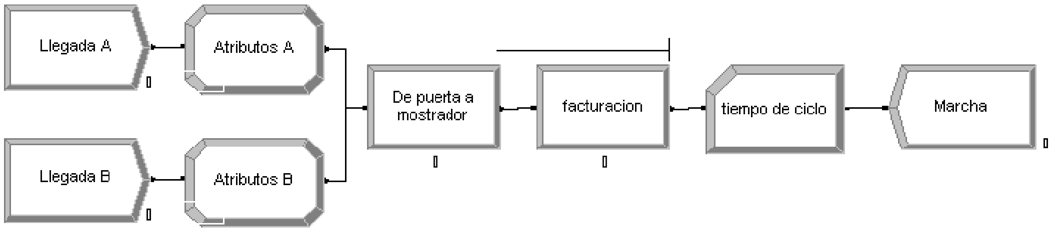


Figura 6.34: Estado final del sistema.

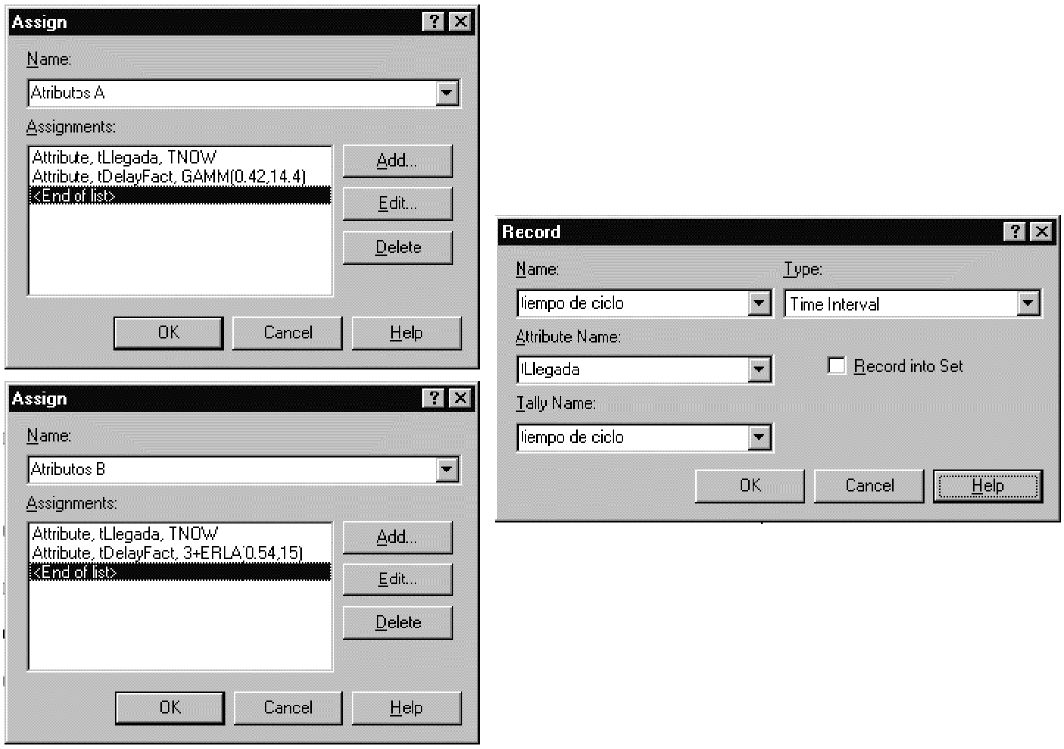


Figura 6.35: Definición de los módulos “Assign” y “Record”.

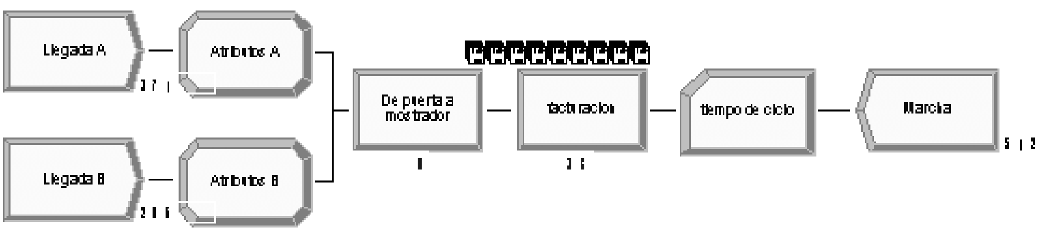


Figura 6.36: Estado final del sistema.

- Tiempo promedio de los pasajeros en el sistema:

Identifier	Average	Half Width	Minimum	Maximum	Observations
tiempo de ciclo	29.471	(Corr)	5.4385	72.772	542
pasajeroA.TotalTime	28.181	(Corr)	5.4385	70.285	350
pasajeroB.TotalTime	31.823	(Insuf)	10.119	72.772	192

- Número de pasajeros que han completado la facturación durante el tiempo simulado.

Value - facturacion Number Out $= 542.00$

- Número medio de pasajeros que esperan en la cola del mostrador de facturación.

Average - facturacion.Queue.NumberInQueue $= 11.808$

Problema 6.4

Realizar el estudio de simulación descrito a continuación[7], usando para ello el entorno de modelado Arena.

Dos tipos diferentes de piezas llegan a un sistema para ser procesadas por un mismo operario. Cada tipo de cola espera en su propia cola, hasta que el único operario del sistema queda libre. Una vez procesadas, ambos tipos de piezas son sometidas a un segundo proceso, realizado por una máquina, concluido el cual, las piezas abandonan el sistema. Las distribuciones de probabilidad de los intervalos de tiempo entre llegadas, y de la duración de la fase "Delay" de los procesos, son las siguientes (todos los tiempos están expresados en horas):

	Proceso de llegada	*Primer proceso*	*Segundo proceso*
Piezas A	*Lognormal(LogMean=11.5, LogStd=2.0)*	*Triangular(Min=5, Mode=6, Max=8)*	*Triangular(Min=4, Mode=6, Max=8)*
Piezas B	*Exponencial(Mean=15)*	*Triangular(Min=3, Mode=7, Max=8)*	*Triangular(Min=4, Mode=6, Max=8)*

Condiciones iniciales: no hay piezas en el sistema (colas vacías y recursos libres). Condición de finalización: la duración de la simulación será de 5000 horas. El objetivo del estudio es estimar los estadísticos siguientes:

- *Tiempo de ciclo medio de las piezas.*
- *Número medio de piezas esperando en las dos colas del primer proceso.*

SOLUCIÓN

El diagrama de módulos se muestra en el Figura 6.37. En los módulos "Assign" se asigna el valor *TNOW* al atributo que representa el instante de llegada de las entidades. En el módulo "Record", situado inmediatamente antes de que las entidades abandonen el sistema, se calcula el tiempo de ciclo de cada entidad.

El primer proceso tiene un único recurso, que se ha denominado *operario*, que atiende a dos colas, una para cada tipo de entidad. Este primer proceso se ha modelado mediante 2 bloques "Process", que comparten el mismo recurso (ver las Figuras 6.38 y 6.39): *operario*. La acción que realizan las entidades en el segundo proceso es "Seize-Delay-Release".

[7] Este estudio de simulación está extraído del texto (Kelton et al. 2002).

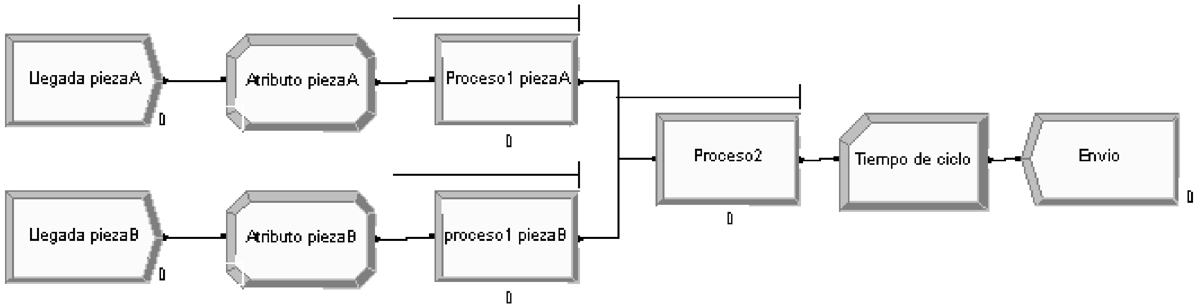


Figura 6.37: Diagrama de módulos.

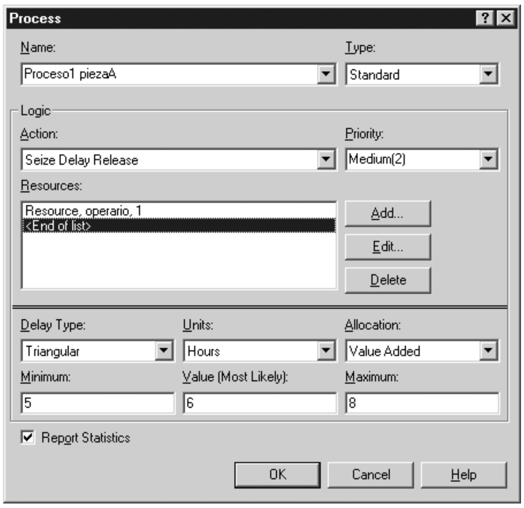


Figura 6.38: Proceso 1 sobre las piezas tipoA.

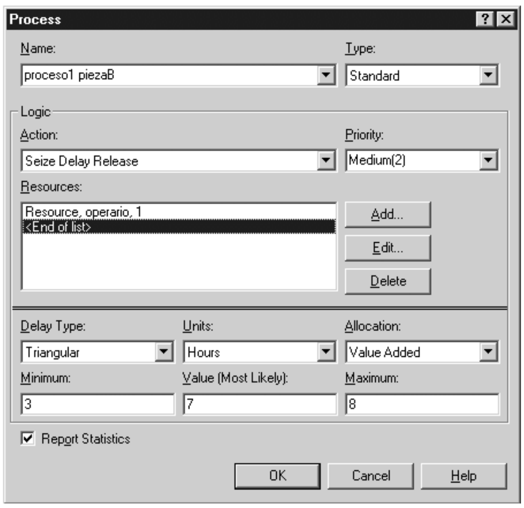


Figura 6.39: Proceso 1 sobre las piezas tipoB.

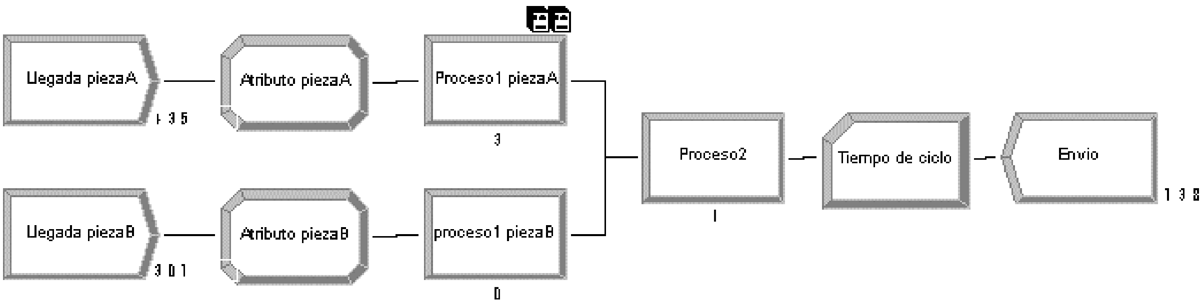


Figura 6.40: Estado final del sistema.

Ejecutando la simulación, se obtienen el estado final mostrado en la Figura 6.40. Los resultados del estudio son los siguientes:

- Tiempo de ciclo

Identifier	Average	Half Width	Minimum	Maximum	Observations
Tiempo de ciclo	25.906	4.0279	9.6143	60.683	738
piezaA.TotalTime	24.828	3.6344	9.6143	56.686	431
piezaB.TotalTime	27.420	(Insuf)	10.141	60.683	307

- Número medio de piezas esperando en las dos colas del primer proceso.

Identifier	Average	Half Width	Minimum	Maximum	Final Value
Proceso1 piezaA. Queue.NumberInQueue	.97822	(Corr)	.00000	4.0000	2.0000
proceso1 piezaB. Queue.NumberInQueue	.83466	.24241	.00000	6.0000	.00000

Problema 6.5

Realizar el estudio de simulación descrito a continuación[8]*, usando para ello el entorno de modelado Arena.*

Se desea modelar el funcionamiento de un restaurante de comida rápida, en el periodo de tiempo que va desde las 10 AM hasta las 2 PM, que es en el que se produce una mayor afluencia de clientes. La llegada de clientes se produce de las tres maneras siguientes:

- *Andando. Los clientes llegan de uno en uno, con intervalos entre llegadas distribuidos exponencialmente, con media 3 minutos. La primera llegada se produce, a partir de las 10 AM, en un instante aleatorio distribuido EXPO(3 minutos).*
- *En coche. El número de clientes por coche puede ser 1, 2, 3 ó 4, con probabilidades 0.2, 0.3, 0.3 y 0.2 respectivamente. Los intervalos entre llegadas están distribuidos exponencialmente con media 5 minutos. La primera llegada se produce, a partir de las 10 AM, en un instante aleatorio distribuido EXPO(5 minutos).*
- *En autobús. Cada día llega un único autobús, en un instante aleatorio distribuido uniformemente entre las 11 AM y las 1 PM. El número de pasajeros del autobús varía de un*

[8]Este estudio de simulación está extraído del texto (Kelton et al. 2002).

día a otro, y al parecer sigue aproximadamente una distribución de Poisson con media 30 pasajeros.

Una vez que los clientes llegan al restaurante, con independencia del medio empleado para ello, operan independientemente. En primer lugar se dirigen al mostrador de petición/pago, en cual tardan TRIA(1,2,4) minutos en realizar su petición y TRIA(1,2,3) minutos en pagarla. Las operaciones de petición y de pago se realizan secuencialmente: en primer lugar la petición, y a continuación el pago, en las cuales el cliente es atendido por un mismo empleado.

A continuación, el cliente se dirige al mostrador de recogida, con el fin de recoger la comida que han pedido. El tiempo que transcurre entre que comienza a ser atendido en dicho mostrador y el instante en que se le entrega la comida está distribuido uniformemente entre 30 segundos y 2 minutos.

Seguidamente, el cliente se dirige al comedor, en el cual hay 30 asientos. Cuando queda un asiento libre, el cliente se sienta en él (no necesariamente con las personas de su grupo). Una vez sentado, comienza a comer, empleando un tiempo TRIA(10,20,30) minutos en terminar su comida, hecho lo cual abandona el restaurante.

En cada mostrador existe una cola FIFO: en el mostrador de petición/pago y en el mostrador de recogida. Asimismo, hay otra cola FIFO en la que los clientes esperan a que quede libre un asiento en el comedor.

El tiempo de tránsito de la puerta al mostrador de petición/pago está distribuido EXPO(30) segundos. Igualmente, está distribuido EXPO(30) segundos el tiempo para ir de este primer mostrador al de recogida, y el tiempo necesario para ir de este segundo mostrador al comedor. Después de comer, el cliente se mueve algo más lentamente, con lo cual tarda EXPO(1) minuto en ir del comedor a la puerta de salida del restaurante.

Durante las 4 horas que dura el periodo de tiempo bajo estudio, 6 empleados atienden el mostrador de petición/pago y otros 2 empleados el mostrador de recogida.

Condiciones iniciales: inicialmente la máquina está libre y la cola vacía. Condición de finalización: se desea simular el sistema durante las 4 horas que dura el periodo bajo estudio. El objetivo del estudio es estimar los siguientes indicadores de la congestión del sistema:

- *Longitud promedio y máxima de cada cola.*
- *Tiempo de espera promedio y máximo en cada cola.*
- *Número total de clientes que abandonan el restaurante.*

SOLUCIÓN

En la Figura 6.41 se muestra el diagrama de módulos del modelo. Esta compuesto por módulos "Create", "Process" y "Dispose" del panel "Basic Process". En el nombre de los módulos "Process" se ha indicado la acción que realiza la entidad, así como la operación lógica con que se corresponde el proceso.

Con el fin de poder obtener estadísticas separadas para los clientes que llegan andando, en coche y en autobús, en cada uno de los tres procesos de llegada se ha definido un tipo diferente de entidad. Al referenciar una entidad en un módulo "Create", Arena automáticamente la define al panel "Entity". En las Figuras 6.42, 6.43 y 6.44 se muestra la definición de los tres módulos "Create". Cabe destacar que:

- En la guía "*Arena Standard, User's Guide*" puede consultarse la sintaxis de la distribución discreta. De acuerdo con ella, el número de clientes que llega en cada coche está distribuido DISC(0.2, 1, 0.5, 2, 0.8, 3, 1.0, 4).
- La llegada en autobús se produce una vez al día, en un instante de tiempo que está distribuido uniformemente entre el minuto 90 y el 180 a partir del inicio de la simulación (es decir, a partir de las 10 AM).

Los cuatro procesos de tránsito no merecen especial mención. En ellos la entidad realiza la acción "Delay". El tiempo que dura la acción está distribuido, en los tres primeros, EXPO(0.5) minutos, y en el cuarto módulo, EXPO(1) minuto.

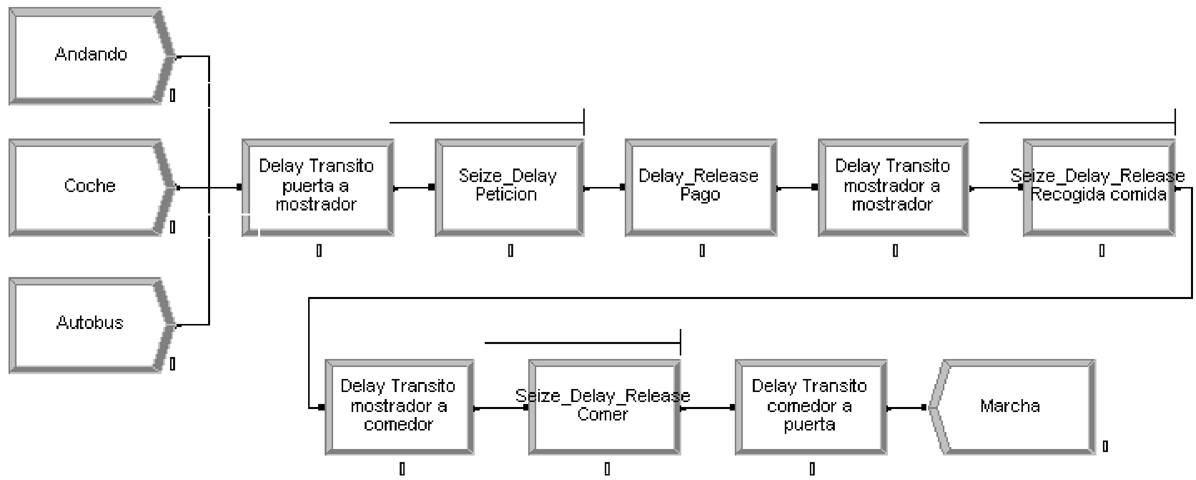


Figura 6.41: Diagrama de módulos del modelo del restaurante.

El cliente paga la comida al mismo empleado del restaurante al que se la ha pedido. Por este motivo, la acción del proceso de petición es "Seize"-"Delay": la entidad abandona el proceso *Peticion* con el recurso capturado. A continuación, entra en el proceso *Pago*, en el cual realiza las acciones "Delay"-"Release". Al describir la acción "Seize" debe indicarse que recurso se captura y cuantas unidades de él. Análogamente, al describir la acción "Release" es preciso indicar qué recurso se libera y cuantas unidades. Al definir las acciones "Delay", debe especificarse la distribución de probabilidad de la duración de las mismas. En las Figuras 6.45 y 6.46 se muestra la definición de ambos procesos.

Al hacer referencia al recurso en la acción "Seize" de un módulo "Process" del panel "Basic Process", Arena define automáticamente el recurso en el módulo de datos "Resource". La definición del recurso se completa en este panel, indicando que la capacidad del recurso es constante, e igual a 6.

En el proceso de recogida de la comida la acción que realiza la entidad es "Seize"-"Delay"-"Release". En la Figura 6.47 se muestra la definición del proceso. Nuevamente, al referenciar en el modulo "Process" un nuevo recurso, Arena lo define de manera automática. La definición debe completarse en el módulo "Resource" especificando que su capacidad es fija, e igual a 2.

Finalmente, el último proceso es el acto de comer. Para llevarlo a cabo, la entidad necesita captar un sitio en el comedor. El sitio del comedor constituye un recurso compuesto por 30 unidades. La entidad únicamente capta un de ellas en la acción "Seize". En la Figura 6.48 se muestra la definición del proceso. Como en el caso de los otros dos recursos del modelo, debe especificarse en el módulo "Resource" que la capacidad del recurso asiento es fija, e igual a 30. En la Figura se 6.49 se muestra la definición de los tres recursos.

El experimento se define de modo que se simule el sistema durante 4 horas, que es la duración del periodo bajo estudio. Se realiza una única réplica, tomando el minuto como unidad base de la simulación. Ejecutando la simulación, en el fichero *.out* se obtienen los estadísticos pedidos en el enunciado.

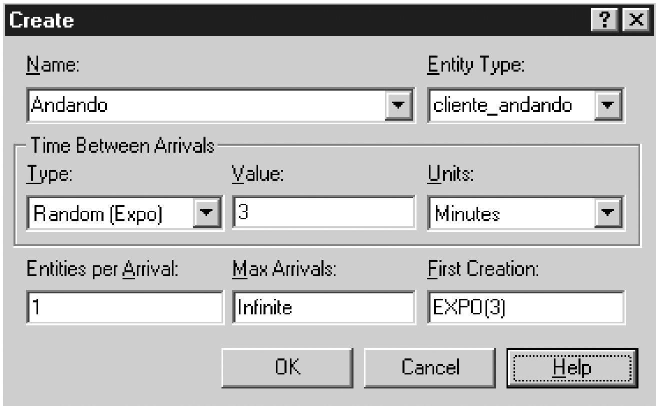


Figura 6.42: Proceso de llegadas andando.

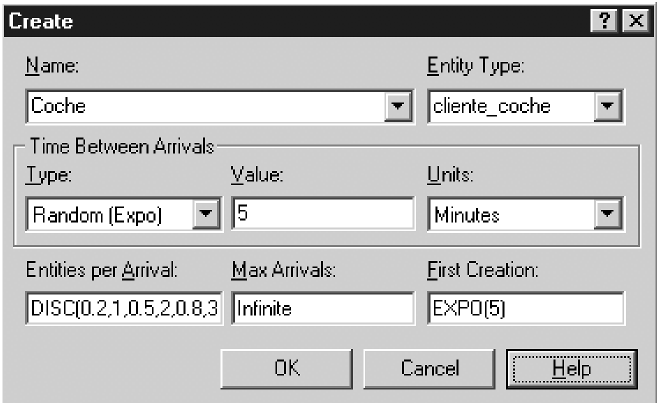


Figura 6.43: Proceso de llegadas en coche.

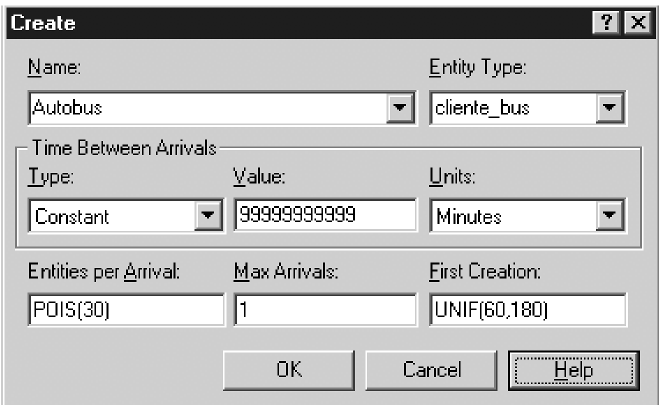


Figura 6.44: Proceso de llegadas en autobús.

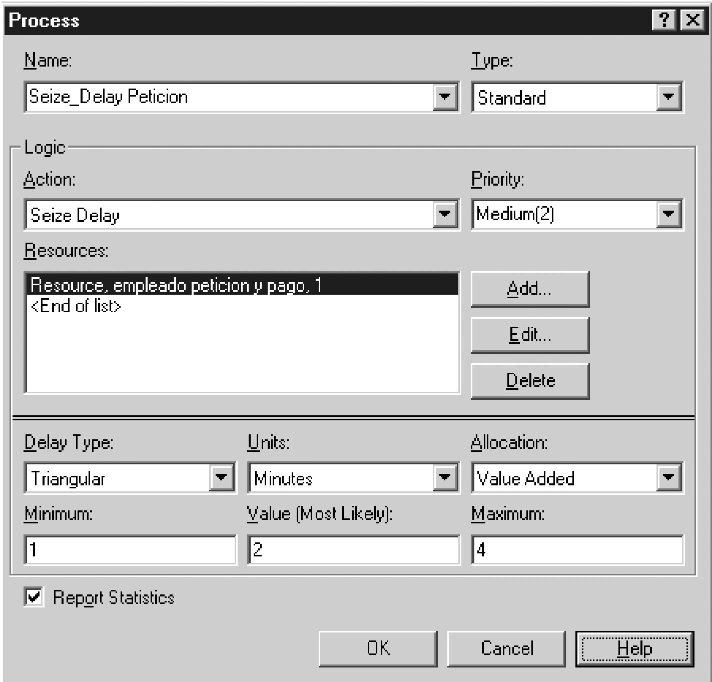


Figura 6.45: Proceso de petición de la comida.

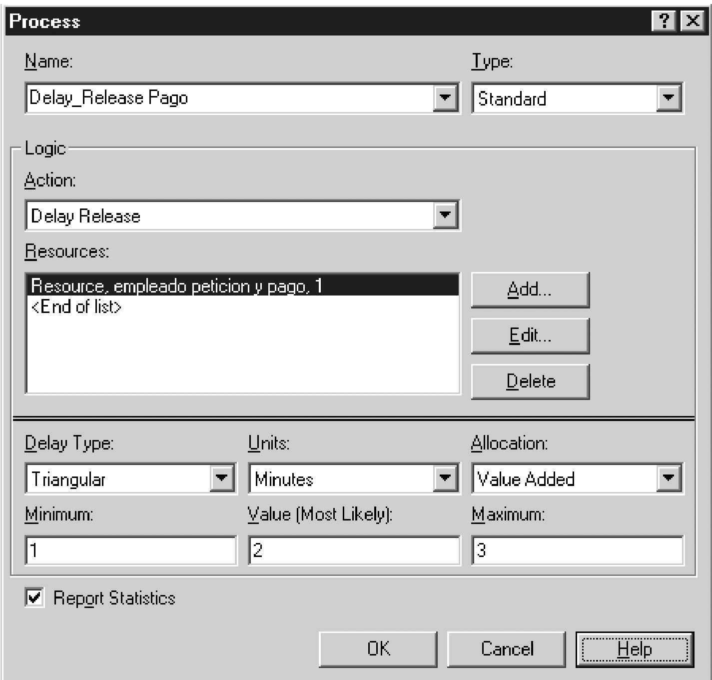


Figura 6.46: Proceso de pago de la comida.

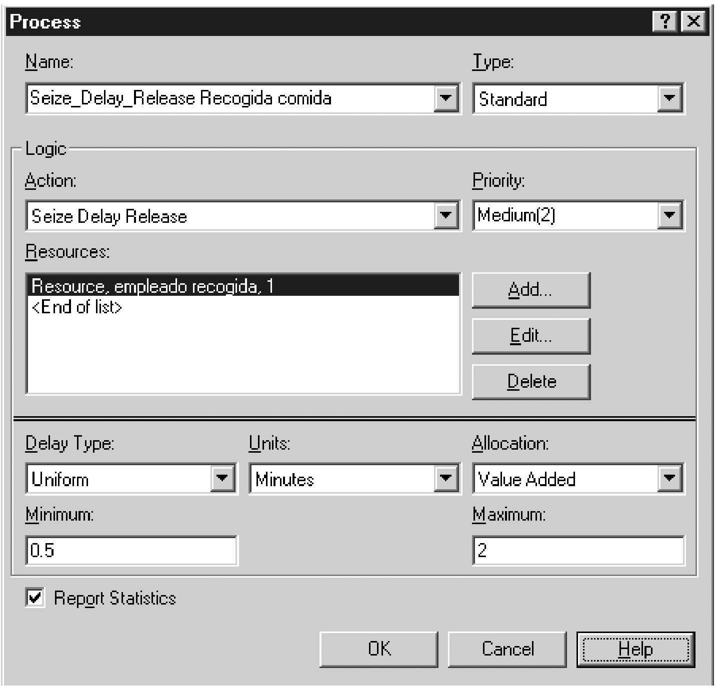


Figura 6.47: Proceso de recogida de la comida.

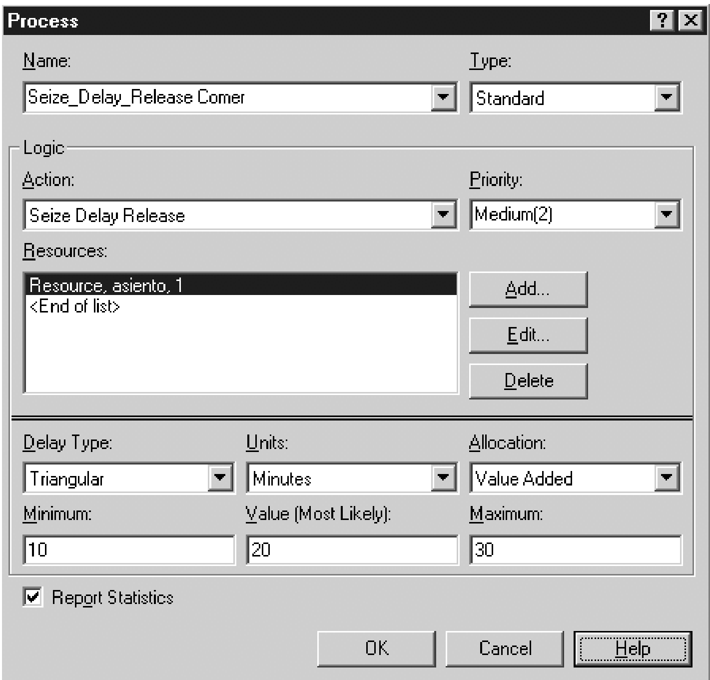
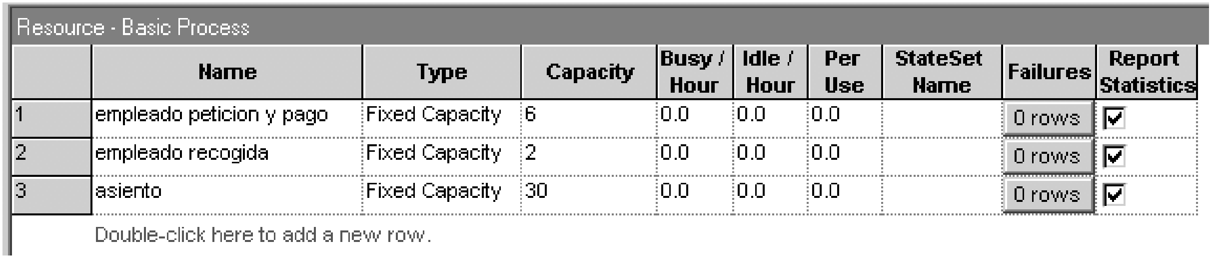


Figura 6.48: Proceso de sentarse y comer.



Resource - Basic Process

	Name	Type	Capacity	Busy / Hour	Idle / Hour	Per Use	StateSet Name	Failures	Report Statistics
1	empleado peticion y pago	Fixed Capacity	6	0.0	0.0	0.0		0 rows	☑
2	empleado recogida	Fixed Capacity	2	0.0	0.0	0.0		0 rows	☑
3	asiento	Fixed Capacity	30	0.0	0.0	0.0		0 rows	☑

Double-click here to add a new row.

Figura 6.49: Definición de los recursos, en el módulo “Resource”.

Problema 6.6

Realizar el estudio de simulación descrito a continuación, usando para ello el entorno de modelado Arena. El sistema a estudiar es una servicio de atención telefónica completamente automatizado, cuya función es informar al cliente acerca de tres tipos de producto: A, B y C.

El cliente llama a un número central, que es atendido por 10 líneas telefónicas. Si en ese instante todas las líneas se encuentran ocupadas, el cliente debe colgar el teléfono, es decir, abandonar el sistema. Si alguna de las líneas telefónicas se encuentra libre, el cliente la ocupa y escucha una grabación, en la que se le ofrece la opción de recibir información sobre uno de los tres tipos de producto: A, B y C. Los clientes escogen entre estas tres opciones con probabilidad 0.76, 0.16 y 0.08 respectivamente. El tiempo empleado en esta actividad está distribuido uniformemente entre 0.1 y 0.6 minutos.

A continuación, el cliente escucha la grabación correspondiente al tipo de producto que ha escogido. Durante la grabación, se le pide que introduzca determinados datos, empleando el teclado telefónico. El tiempo que tarda el cliente en completar la audición de la grabación depende del tipo de producto, y de las elecciones que ha ido haciendo a través del teclado. En los tres productos, el tiempo que dura la audición está distribuido triangularmente, con los siguientes valores del rango y el modo (expresados en minutos):

Producto	*Rango*	*Modo*
A	*10 - 18*	*15*
B	*8 - 20*	*15*
C	*7 - 12*	*10*

La sistema de atención telefónica funciona durante 8 horas al día. La frecuencia de llegada de llamadas se supone constante. El tiempo entre llamadas está distribuido exponencialmente, con media 1 minuto. El tiempo que transcurre entre la apertura del sistema y la primera llamada también está distribuido exponencialmente, con media 1 minuto.

Condiciones iniciales: al comenzar el día, no hay ninguna llamada en el sistema. Condición de finalización: desea simularse el sistema durante las 8 horas que permanece en funcionamiento cada día. Objetivo del estudio: como medida del grado de satisfacción de los clientes con el servicio, se desea estimar el número de clientes que han encontrado todas las líneas ocupadas y que han tenido que colgar sin ser atendidos.

SOLUCIÓN

En la Figura 6.50 se muestra el diagrama de módulos del modelo. En el sistema existe un único tipo de entidad: la llamada. El proceso de llegada de llamadas puede modelarse

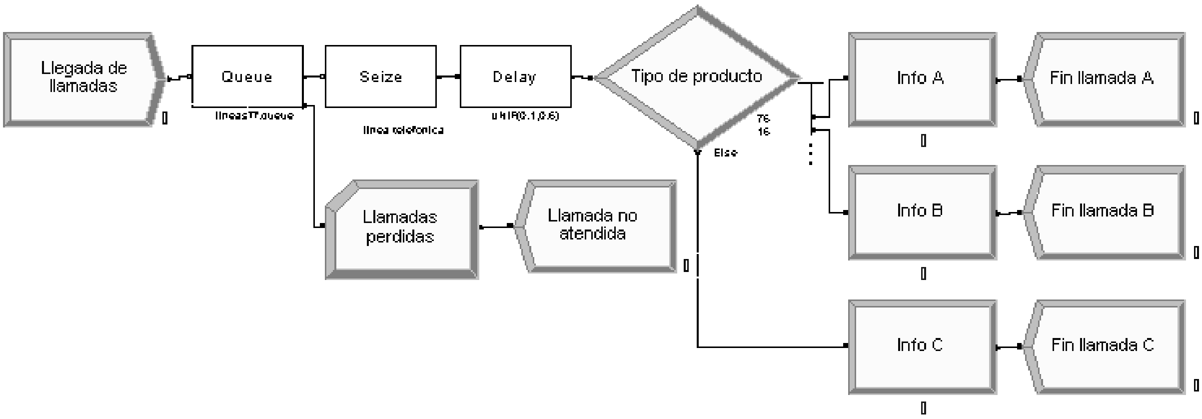


Figura 6.50: Diagrama de módulos.

mediante un módulo "Create" del panel "Basic Process", en el que también se define el tipo de entidad: *llamada*. Tanto el tiempo entre llegadas ("Time between arrivals") como el instante de creación de la primera entidad ("First creation") están distribuidos EXPO(1) minutos.

El modelo contiene los 4 procesos siguientes:

- La primera grabación, en la que se pide al cliente que escoja acerca de qué producto desea informarse. El proceso tiene 10 recursos. La acción que realiza la entidad es "Seize" - "Delay". Al finalizar la audición de esta primera grabación el cliente sigue ocupando la línea telefónica, con lo cual el proceso no contiene la acción "Release".

  El proceso tiene "balking". Puede modelarse mediante la conexión de los módulos "Queue", "Seize" y "Delay" del panel "Blocks". Obsérvese que el módulo "Seize" debe tomarse del panel "Blocks", y no del panel "Advanced Process", ya que el módulo "Seize" del panel "Advanced Process" trae automáticamente incorporada una cola que no permite modelar el "balking".

  - En el módulo "Queue" debe indicarse el nombre de la cola ("Queue ID"), y definirse su capacidad máxima ("Capacity"), que en este caso es igual a cero. Cuando en los módulos del panel "Blocks" se hacer referencia a un nuevo objeto (como en este caso la cola), Arena no define automáticamente el objeto. Es preciso definirlo explícitamente en el módulo de datos correspondiente. En este caso, debe definirse la cola en el módulo de datos "Queue", del panel "Basic Process".
  - En el módulo "Seize" debe indicarse:
    - A qué concepto ("Allocation") se asigna el tiempo de espera en cola: "Wait".
    - El nombre del recurso: *linea telefonica*. Arena no define un nuevo recurso por el hecho de hacer referencia a él desde un módulo "Seize" del panel "Blocks". Es preciso definir el recurso en el módulo de datos "Resource", del panel "Basic Process". Al definirlo, se asigna al recurso una capacidad fija, igual a 10.
    - La capacidad del recurso que captura la entidad ("Number of units"): 1.
  - En el módulo "Delay" debe indicarse:
    - La distribución de probabilidad del tiempo que dura la acción, UNIF(0.1,0.6).
    - El concepto ("Allocation") al cual se desea asignar este tiempo: *ValueAdded*.
- Las tres grabaciones correspondientes a los tres tipos de producto. La entidad tiene ya capturado el recurso, con lo cual las acciones del proceso son "Delay" - "Release". Este proceso puede modelarse mediante un bloque "Process" del panel "Basic Process"

A la salida del primer proceso, el flujo de las entidades se divide en tres posibles caminos. Esta división del flujo se modela mediante un bloque "Decide", seleccionando como tipo ("Type"): "N-way by chance".

Las llamadas perdidas, es decir, aquellas que abandonan el sistema sin ser atendidas, fluyen por la salida situada en la parte inferior derecha del módulo “Queue” y se dirigen a un módulo “Dispose”, del panel “Basic Process”, que representa su salida del sistema.

Dado que se desea contabilizar el número de llamadas perdidas, es necesario insertar un módulo “Record” antes del módulo “Dispose”. El módulo “Record” se configura de manera que defina un estadístico del tipo (“Type”): *Count*. La cantidad en que debe incrementarse el estadístico (“Value”) es 1.

Realizando una única réplica de la simulación, de 8 horas de duración, se obtiene que de las 476 llamadas que han abandonado el sistema, 181 no han sido atendidas (es decir, casi el 40 % de las llamadas).

Problema 6.7

Realizar el estudio de simulación descrito a continuación[9]*, usando para ello el entorno de modelado Arena.*

El sistema bajo estudio es un servicio telefónico que presta soporte técnico sobre tres tipos de producto (1, 2 y 3), y en el que trabajan 11 técnicos. El cliente accede a este servicio llamando a un número telefónico central, que es atendido por 26 líneas. Si un cliente llama en un instante en que las 26 líneas se encuentran ocupadas, entonces recibe la señal de comunicando y debe colgar el teléfono. Si, por el contrario, alguna línea se encuentra libre, entonces el cliente la ocupa y escucha una grabación, en la que se le pregunta sobre qué producto desea realizar la consulta: 1, 2 ó 3.

Los porcentajes de consultas acerca de cada uno de los tres tipos de producto son el 25 %, 34 % y 41 % respectivamente. Esta actividad requiere un tiempo distribuido uniformemente entre 0.1 y 0.5 minutos.

No todos los técnicos están cualificados para responder preguntas sobre los tres tipos de producto. Si un técnico cualificado para prestar soporte técnico de ese tipo de producto se encuentra libre, entonces el cliente es atendido. Si ninguno se encuentra libre, el cliente entra en una cola electrónica, en la que escucha música hasta que un técnico capacitado para atenderle queda libre.

El tiempo necesario para contestar una pregunta técnica está distribuido triangularmente, con rango de 3 a 18 minutos y modo 6 minutos, con independencia del tipo de producto al que haga referencia. Una vez completa la consulta, el cliente abandona el sistema.

La sistema de atención telefónica funciona desde las 8 AM hasta las 7 PM. Aunque el sistema cierra a las 7 PM, todas las llamadas que hasta ese instante han entrado son atendidas. El tiempo entre llamadas sucesivas está distribuido exponencialmente, con media 1 minuto. El tiempo que transcurre desde las 8 AM hasta que se recibe la primera llamada también está distribuido exponencialmente con media 1 minuto.

Cada uno de los 11 técnicos trabaja 8 horas al día, y dispone de media hora para comer (no incluida en las 8 horas). No todos ellos están cualificados para responder cuestiones acerca de los tres tipos de producto. En la siguiente tabla se muestra el tipo de llamadas que puede atender cada uno de ellos, así como su horario.

[9] Este estudio de simulación está extraído del texto (Kelton et al. 2002).

Técnico	*Tipo de*	*Periodo de tiempo (30 minutos)*																					
núm.	*producto*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*
1	*1*	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•					
2	*1*						•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
3	*1,3*			•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			
4	*1,2,3*					•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
5	*1,2,3*				•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•		
6	*2*	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•					
7	*2*						•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
8	*2*				•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		
9	*3*	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•					
10	*3*						•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
11	*3*				•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		

Condiciones iniciales: no hay ninguna entidad en el sistema. Condición de finalización: que la simulación alcance 11 horas, que es el periodo de funcionamiento diario del servicio (desde las 8 AM hasta las 7 PM).

Interesa estimar los siguientes estadísticos, que miden el grado de satisfacción de los clientes con el servicio:

- *El número de clientes que han encontrado todas las líneas ocupadas y que han tenido que colgar sin ser atendidos.*
- *En función del tipo de producto acerca del que se realiza la consulta:*
  - *El tiempo medio que debe esperar el cliente (escuchando música) para recibir la atención de un técnico.*
  - *Número medio de llamadas en espera de ser atendidas.*

Asimismo, se desea conocer la utilización de cada una de los técnicos, a fin de evaluar su carga de trabajo.

SOLUCIÓN

En la Figura 6.51 se muestra el diagrama de módulos del modelo. La primera parte del modelo, hasta el módulo de decisión, es conceptualmente igual a la del problema anterior, con lo cual no es necesario discutirla de nuevo.

Las entidades que salen por cualquiera de las tres ramas del módulo de decisión, tienen ya capturada una unidad del recurso *linea telefonica*. Ahora necesitan, además, capturar a un técnico cualificado. Esta acción puede modelarse mediante un bloque “Seize” del panel “Advanced Process”, el cual lleva internamente incorporada una cola. A continuación, la entidad realiza la acción “Delay” (mientras el técnico proporciona la información), y seguidamente la acción “Release”, liberando los 2 recursos que tiene capturados: la línea telefónica y el técnico. Finalmente, la entidad abandona el sistema.

Cada uno de los 11 técnicos constituyen un recurso del modelo, cuya capacidad está planificada de acuerdo a su horario de trabajo: capacidad uno durante su turno de trabajo y capacidad cero durante el tiempo previsto para la comida y durante las horas del día en las que no trabaja. Los 11 recursos deben definirse en el módulo de datos “Resource” (ver la Figura 6.52), y las correspondientes 11 planificaciones en el módulo de datos “Schedule”. La regla escogida para las planificaciones es “Ignore”.

Al definir las planificaciones (en el módulo “Schedule”) resulta útil escoger *halfhours* como unidad de tiempo (“Time Units”) para las duraciones (“Durations”). La definición de las duraciones debe hacerse indicando explícitamente la capacidad a lo largo de las 11 horas del día. Por ejemplo, las duraciones (“Durations”) de la planificación del primer técnico se muestra en la casilla de la parte derecha de la Figura 6.53. Es necesario indicar que la capacidad de este recurso es cero durante los últimos 5 periodos de media hora del día. En caso contrario, si se deja sin especificar la capacidad en ese periodo, Arena comenzaría a repetir, a partir del periodo de tiempo 18, la planificación de nuevo desde el principio.

Una vez definidos los 11 recursos y sus planificaciones, es necesario definir 3 conjuntos, cada uno compuesto por los empleados que están capacitados para atender consultas de uno de los tres productos. Los conjuntos poseen los miembros señalados mediante un aspa:

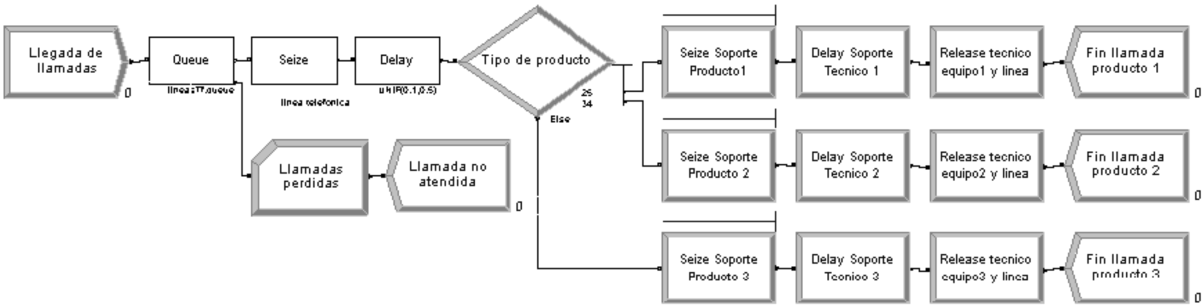


Figura 6.51: Diagrama de módulos inicial.

Resource - Basic Process

	Name	Type	Capacity	Schedule Name	Schedule Rule	Busy / Hour	Idle / Hour	Per Use	StateSet Name	Failures	Repo Statis
1	linea telefonica	Fixed Capacity	26	26	Wait	0.0	0.0	0.0		0 rows	☑
2	tecnico1	Based on Schedule	turno1	turno1	Ignore	0.0	0.0	0.0		0 rows	☑
3	tecnico2	Based on Schedule	turno2	turno2	Ignore	0.0	0.0	0.0		0 rows	☑
4	tecnico3	Based on Schedule	turno3	turno3	Ignore	0.0	0.0	0.0		0 rows	☑
5	tecnico4	Based on Schedule	turno4	turno4	Ignore	0.0	0.0	0.0		0 rows	☑
6	tecnico5	Based on Schedule	turno5	turno5	Ignore	0.0	0.0	0.0		0 rows	☑
7	tecnico6	Based on Schedule	turno6	turno6	Ignore	0.0	0.0	0.0		0 rows	☑
8	tecnico7	Based on Schedule	turno7	turno7	Ignore	0.0	0.0	0.0		0 rows	☑
9	tecnico8	Based on Schedule	turno8	turno8	Ignore	0.0	0.0	0.0		0 rows	☑
10	tecnico9	Based on Schedule	turno9	turno9	Ignore	0.0	0.0	0.0		0 rows	☑
11	tecnico10	Based on Schedule	turno10	turno10	Ignore	0.0	0.0	0.0		0 rows	☑
12	tecnico11	Based on Schedule	turno11	turno11	Ignore	0.0	0.0	0.0		0 rows	☑

Double-click here to add a new row.

Figura 6.52: Recursos.

Schedule - Basic Process

	Name	Format Type	Type	Time Units	Scale Factor	Durations
1	turno1	Duration	Capacity	Halfhours	1.0	4 rows
2	turno2	Duration	Capacity	Halfhours	1.0	4 rows
3	turno3	Duration	Capacity	Halfhours	1.0	5 rows
4	turno4	Duration	Capacity	Halfhours	1.0	5 rows
5	turno5	Duration	Capacity	Halfhours	1.0	5 rows
6	turno6	Duration	Capacity	Halfhours	1.0	4 rows
7	turno7	Duration	Capacity	Halfhours	1.0	4 rows
8	turno8	Duration	Capacity	Halfhours	1.0	5 rows
9	turno9	Duration	Capacity	Halfhours	1.0	4 rows
10	turno10	Duration	Capacity	Halfhours	1.0	4 rows
11	turno11	Duration	Capacity	Halfhours	1.0	5 rows

Double-click here to add a new row.

Durations

	Value	Duration
1	1	7
2	0	1
3	1	9
4	0	5

Double-click here to add

Figura 6.53: Planificación de la capacidad de los recursos.

	Número de técnico										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
grupo1	X	X	X	X	X						
grupo2				X	X	X	X	X			
grupo3			X	X	X				X	X	X

El propósito de definir los conjuntos es especificar cuáles son los recursos de cada uno de los módulos "Seize" conectados en las salidas del módulo "Decide". Así, los recursos del módulo "Seize", conectado a la salida con porcentaje 25 %, son los miembros del conjunto *grupo1*. Es decir, las llamadas que hacen referencia al tipo de producto 1, sólo pueden ser atendidas por los miembros del conjunto *grupo1*. Análogamente, los recursos del módulo "Seize", conectado a la salida con porcentaje 34 %, son los miembros *grupo2*; e igualmente, los recursos del módulo "Seize", conectado a la salida "Else" del módulo "Decide", son los miembros *grupo3*.

La definición de los conjuntos se hace en el módulo de datos "Set", que se encuentra en el panel "Basic Process". El orden en el que se han definido los miembros de los conjuntos es tal que aquellos técnicos que están capacitados para atender más de un producto son listados en último lugar. El orden de definición de los miembros de los conjuntos es el siguiente:

grupo1: tecnico1, tecnico2, tecnico3, tecnico4 y tecnico5.

grupo2: tecnico6, tecnico7, tecnico8, tecnico4 y tecnico5.

grupo3: tecnico9, tecnico10, tecnico11, tecnico3, tecnico4, y tecnico5.

En la parte izquierda de la Figura 6.54 se muestra el contenido del panel "Sets". En la parte derecha de la misma pueden verse los miembros del conjunto *grupo2*.

Para definir cada uno de los tres módulos "Seize" (del panel "Advanced Process"), debe introducirse la información siguiente:

- El nombre ("Name") que se desea dar al módulo.
- A qué concepto ("Allocation") desea asignarse el tiempo de espera en cola.
- La definición del recurso. Es preciso indicar:
  - El tipo ("Type") de recurso. Por tratarse de un conjunto, debe seleccionarse "Set".
  - El nombre del conjunto ("Name").
  - El número de unidades ("Quantity") que capta la entidad.
  - La regla que debe seguirse para seleccionar el miembro del conjunto ("Selection Rule") cuando existan varias posibles opciones. En este caso se escoge "Preferred order", que indica que debe tenerse en cuenta el orden en el que se han definido los miembros del conjunto, y escogerse el primero de la lista que se encuentre libre. De esta forma, se favorece que se ocupen en primer lugar aquellos técnicos cualificados para soportar un menor número de productos.
  - A lo hora de liberar al técnico en el módulo "Release", será necesario saber qué técnico en concreto tiene capturada la entidad. En índice del miembro del conjunto que ha capturado la entidad se almacena en un atributo de la entidad cuyo nombre debe indicarse en la casilla "Save Attribute".
- El tipo de la cola ("Queue type") y su nombre ("Queue Name").

En la Figura 6.55 se muestra la definición del módulo "Seize" correspondiente a los productos del tipo 1.

Una vez la entidad ha capturado a un técnico, entra en un módulo "Delay", en el que está durante un tiempo distribuido TRIA(3,6,18), y a continuación entra en el módulo "Release", con el fin de liberar tanto al técnico como a la línea telefónica. En la Figura 6.56 se muestra la definición del módulo "Release" para las consultas referentes al tipo de producto 1. Obsérvese que al liberar el técnico debe especificarse cuál es el miembro del conjunto que se libera: para ello debe indicarse (en la casilla "Set Index") el nombre del atributo de la entidad que contiene esa información (en este caso es el atributo *Indice del tecnico*).

Ejecutando una réplica de la simulación, con duración 11 horas, se obtiene el fichero *.out*, que contiene la información para contestar las preguntas del enunciado.

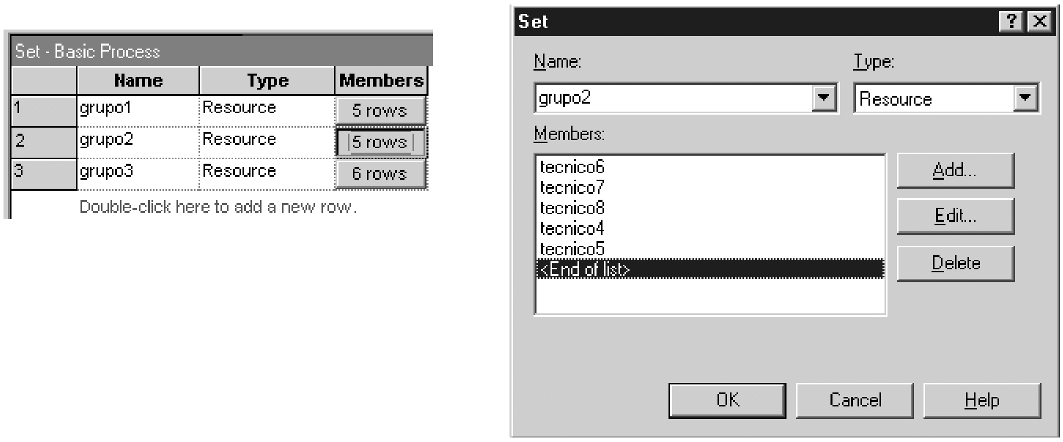


Figura 6.54: Definición de los conjuntos.

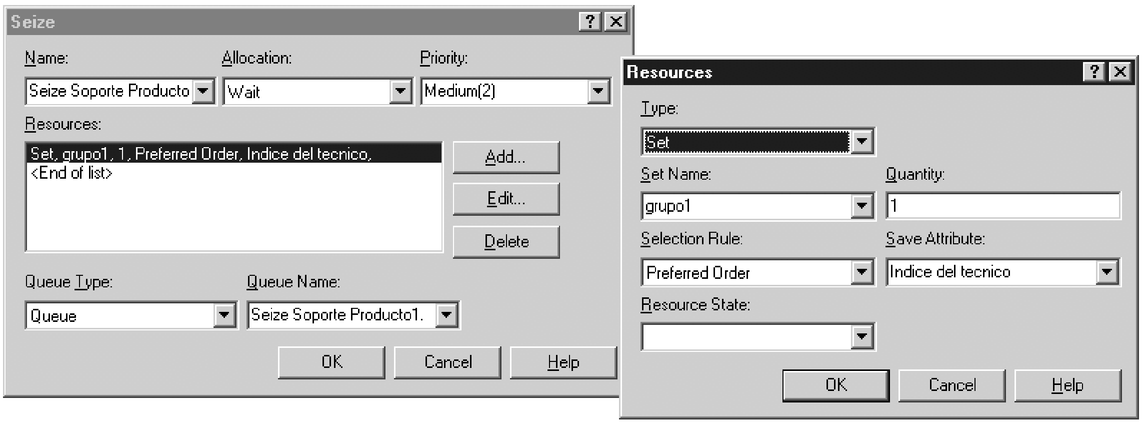


Figura 6.55: Módulo “Seize” de consultas de productos del tipo 1.

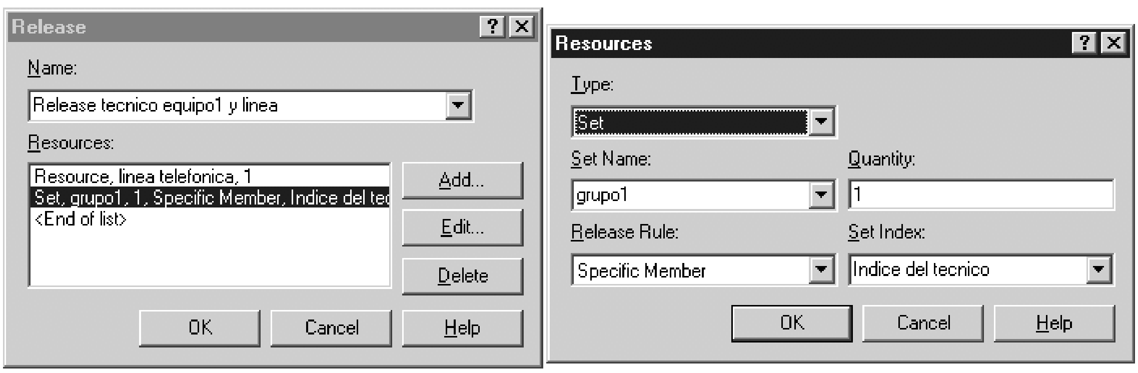


Figura 6.56: Módulo “Release” de consultas de productos del tipo 1.

Tema 7

Modelos analíticos y simulación

Este tema NO SE EXIGIRÁ EN EL EXAMEN.

Como actividad complementaria al estudio de la asignatura, se propone únicamente la lectura del contenido del tema, por ello no se plantean ejercicios prácticos.

Parte III

Modelado y generación de las entradas aleatorias

Tema 8

Modelado de las distribuciones de probabilidad de entrada

Problema 8.1

Dibuje en una misma gráfica la densidad de probabilidad de cuatro distribuciones normales con media cero, pero con desviaciones estándar $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1 y 2 respectivamente.

SOLUCIÓN

La densidad de probabilidad de la distribución normal es (ver la Figura 8.1):

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \qquad \text{para todos los números reales } x$$

Problema 8.2

Dibuje la probabilidad de la distribución de Poisson que resulta cuando el parámetro α es igual a:

1. $\alpha = \frac{1}{2}$
2. $\alpha = 1$
3. $\alpha = 2$
4. $\alpha = 4$

SOLUCIÓN

La probabilidad de la distribución de Poisson con media α es (ver la Figura 8.2):

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\alpha} \cdot \alpha^x}{x!} & \text{si } x \in \{0, 1, \ldots\} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Problema 8.3

Dibuje en una misma gráfica la densidad de probabilidad de dos distribuciones exponenciales, la primera con $\lambda = 0.6$, y la segunda con $\lambda = 1.2$.

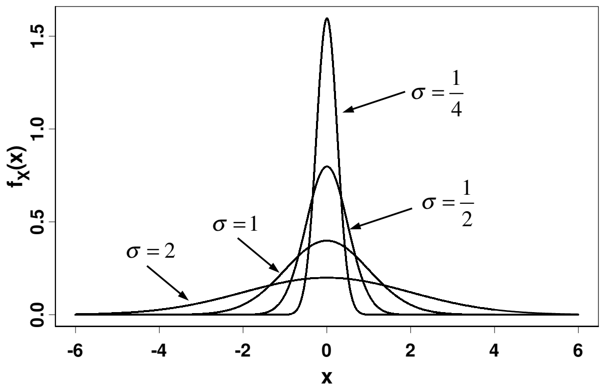


Figura 8.1: Densidades de probabilidad de la distribución normal (Problema 8.1).

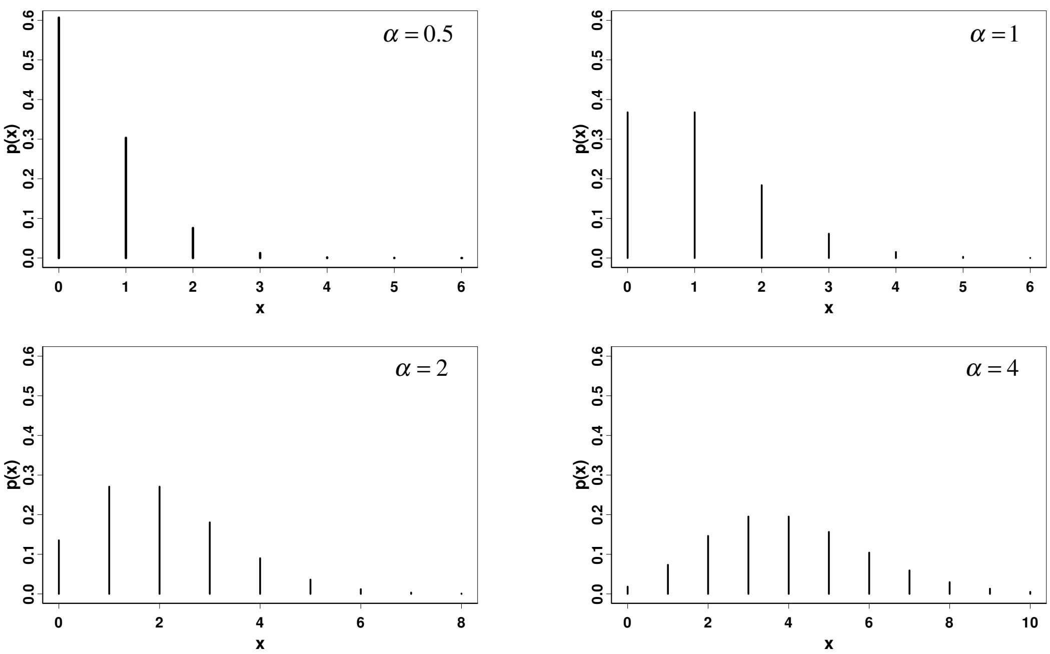


Figura 8.2: Densidades de probabilidad de la distribución de Poisson (Problema 8.2).

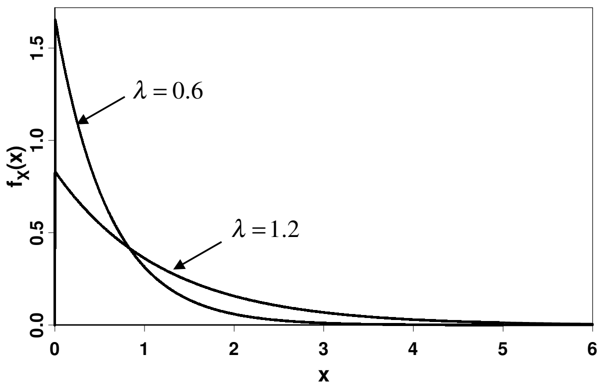


Figura 8.3: Densidades de probabilidad de la distribución exponencial (Problema 8.3).

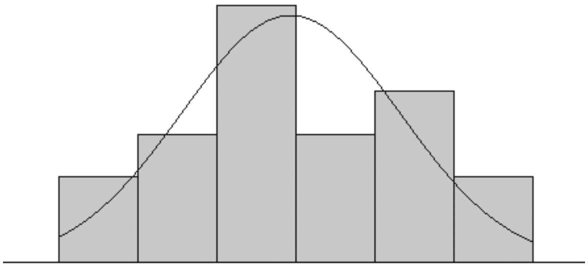


Figura 8.4: Ajuste de una distribución normal, usando Input Analyzer (Problema 8.4).

SOLUCIÓN

La densidad de probabilidad de la distribución exponencial con media λ es (ver la Figura 8.3):

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Problema 8.4

En una línea de ensamblaje de coches, se emplea un robot para colocar las puertas. Se sospecha que el tiempo de instalación obedece una distribución normal. El robot es capaz de medir de manera precisa el tiempo que tarda en instalar cada puerta. Se tomaron automáticamente 20 *medidas del tiempo de instalación, obteniéndose los siguientes tiempos, medidos en segundos*[1]*:*

99.79	99.56	100.17	100.33
100.26	100.41	99.98	99.83
100.23	100.27	100.02	100.47
99.55	99.62	99.65	99.82
99.96	99.90	100.06	99.85

Dibuje el histograma de los datos experimentales y realice el ajuste de una distribución normal usando la herramienta Input Analyzer.

Dibuje el gráfica Q-Q comparando los datos experimentales con una distribución normal. ¿Soporta el gráfico Q-Q la hipótesis de que los datos están distribuidos normalmente?

SOLUCIÓN

Para estudiar los datos usando Input Analyzer, pueden seguirse los pasos siguientes:

- Guardar los datos en un fichero de texto, por ejemplo, ”datos.dst”.
- Arrancar Input Analyzer, y crear una nueva sesión de trabajo: *File / New*.
- Importar el fichero de texto con los datos: *File / Data File / Use Existing ...*.
- Al cargar los datos, Input Analyzer muestra el histograma de los mismos. Para modificar los parámetros del histograma: *Options / Parameters / Histogram ...*. Por ejemplo, puede escogerse:

[1]Este problema ha sido extraído del texto (Banks, Carson & Nelson 1996).

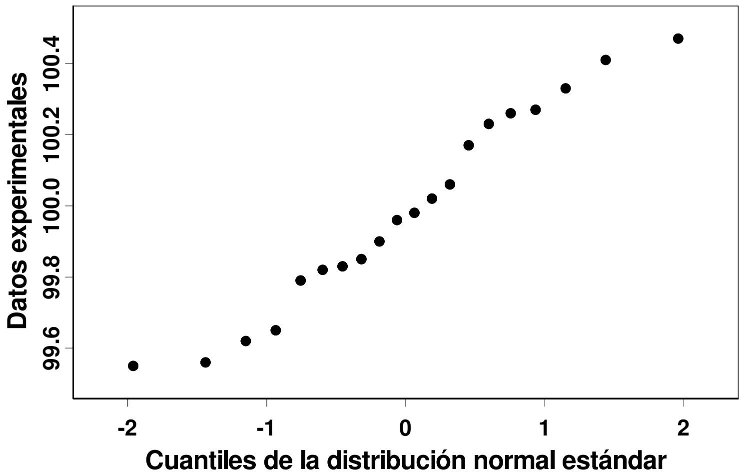


Figura 8.5: Gráfico Q-Q de los datos con la distribución normal estándar (Problema 8.4).

- Número de intervalos: 6
- Valor inferior: 99.4
- Valor superior: 100.6

Se realiza el ajuste a la distribución normal seleccionando: *Fit / Normal*. En la Figura 8.4 se muestran el histograma y la densidad de probabilidad de la distribución normal ajustada. Los resultados del ajuste son los siguientes:

```
Distribution Summary

Distribution: Normal
Expression: NORM(100, 0.276)
Square Error: 0.019239

Chi Square Test
  Number of intervals = 2
  Degrees of freedom  = -1
  Test Statistic      = 1.04
  Corresponding p-value < 0.005

Kolmogorov-Smirnov Test
  Test Statistic = 0.108
  Corresponding p-value > 0.15

Data Summary

Number of Data Points = 20
Min Data Value        = 99.5
Max Data Value        = 100
Sample Mean           = 100
Sample Std Dev        = 0.283

Histogram Summary

Histogram Range     = 99.4 to 101
Number of Intervals = 6
```

La distribución normal ajustada a los datos tiene media $\mu = 100$ y desviación estándar $\sigma = 0.276$. Cuando el número de medidas experimentales es pequeña, como en este caso, la gráfica Q-Q es una herramienta más potente que el histograma y los tests estadísticos de uniformidad. En la Figura 8.5 se muestra el gráfico cuantil-cuantil de los datos experimentales frente a la distribución normal estándar.

A la vista del histograma es difícil decidir si los datos están bien representados mediante una distribución normal. Sin embargo, la percepción de una línea recta es bastante clara en el gráfico Q-Q, lo cual apoya la hipótesis de la distribución normal.

A la hora de evaluar la linealidad del gráfico Q-Q, es útil tener en cuenta las siguientes tres consideraciones[2]:

- Los valores observados nunca van a caer sobre una línea resta.
- Los valores observados no son independientes, ya que han sido ordenados. Por ello, si un punto está por encima de la línea recta, es probable que el siguiente punto se encuentre también por encima de la línea. Es muy improbable que los puntos se alternen a un lado y otro de la línea.
- Las varianzas de los extremos del gráfico (valores más pequeños y mayores) son mucho mayores que las varianzas en la parte central. Por ello, son aceptables grandes discrepancias en los extremos. La linealidad de los puntos en el medio del gráfico es mucho más importante que la linealidad en los extremos.

Problema 8.5

Se ha contabilizado el número de vehículos que llegan a determinado semáforo durante un periodo de 5 minutos, entre las 7:00 AM y las 7:05 AM. Las medidas se han realizado todos los días laborables, durante 20 semanas. Las observaciones obtenidas son las siguientes[3]*:*

Llegadas por periodo	*Frecuencia*	*Llegadas por periodo*	*Frecuencia*
0	12	6	7
1	10	7	5
2	19	8	5
3	17	9	3
4	10	10	3
5	8	11	1

Dibujar el histograma de los datos experimentales y realizar el ajuste a una distribución de Poisson. A continuación, aplicad el test chi-cuadrado para contrastar la hipótesis de que las observaciones experimentales obedecen la distribución de Poisson ajustada.

SOLUCIÓN

En la Figura 8.6 se muestra el histograma de los datos experimentales y el histograma de la distribución de Poisson ajustada, cuya media es $\alpha = 3.64$. Se ha empleado para ello Input Analyzer. El test chi-cuadrado aplicado por Output Analyzer rechaza la hipótesis nula de que la variable está distribuida Poisson con media 3.64:

```
Distribution: Poisson
Expression: POIS(3.64)
Square Error: 0.025236

Chi Square Test
  Number of intervals = 6
  Degrees of freedom  = 4
  Test Statistic      = 19.8
  Corresponding p-value < 0.005
```

Como ilustración de la aplicación ”manual” del test, a continuación se muestra su aplicación para 7 intervalos, en lugar de para 6 como ha hecho Input Analyzer. O_i representa la

[2]Ofrecidas en el texto (Banks et al. 1996).

[3]Este problema ha sido extraído del texto (Banks et al. 1996).

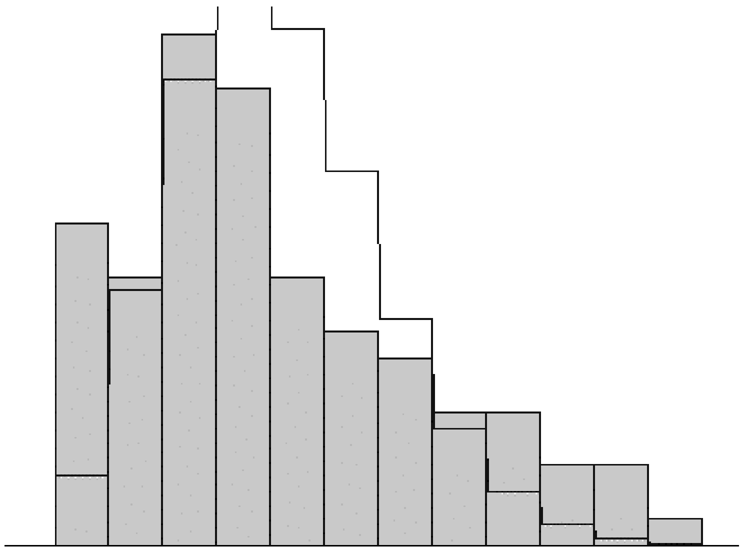


Figura 8.6: Histograma de los datos y de la distribución de Poisson ajustada (Problema 8.5).

frecuencia observada en los datos experimentales, y E_i la frecuencia esperada, que se calcula de la forma siguiente:

$$E_i = n \cdot p_i = n \cdot \frac{e^{-\alpha} \cdot \alpha^i}{i!} \qquad \rightarrow \qquad E_i = 100 \cdot \frac{e^{-3.64} \cdot 3.64^i}{i!}$$

x_i	O_i	E_i	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
$0,1$	$12+10=22$	$2.6+9.6=12.2$	7.87
2	19	17.4	0.15
3	17	21.1	0.80
4	10	19.2	4.41
5	8	14.0	2.57
6	7	8.5	0.26
$7,8,9,10,11$	$5+5+3+3+1=17$	$4.4+2.0+0.8+0.3+0.1=7.6$	11.62
TOTAL	100	100.0	27.68

El estadístico del test vale $\chi_0^2 = 27.68$. El número de grados de libertad es $7-1-1=5$. Es decir, el número de intervalos, menos uno, y menos el número de parámetros que se han ajustado a partir de los datos (en este caso se ha ajustado la media, así que uno). El punto crítico con un nivel de significación $\alpha = 0.05$ es $\chi^2_{0.95,5} = 11.070$. Así pues, el test rechaza la hipótesis nula con un nivel de significación 0.05: es conveniente buscar otro tipo de distribución a la cual ajustar los datos, o bien emplear una distribución empírica.

Problema 8.6

En un proceso de llegada de entidades a un sistema, se han registrado los intervalos de tiempo entre llegadas durante un periodo de 100 minutos. Las observaciones registradas han sido las siguientes (ordenadas en el orden en que se han recogido)[4]*:*

[4]Este problema ha sido extraído del texto (Banks et al. 1996).

0.44	*0.53*	*2.04*	*2.74*	*2.00*	*0.30*	*2.54*	*0.52*	*2.02*	*1.89*	*1.53*	*0.21*
2.80	*0.04*	*1.35*	*8.32*	*2.34*	*1.95*	*0.10*	*1.42*	*0.46*	*0.07*	*1.09*	*0.76*
5.55	*3.93*	*1.07*	*2.26*	*2.88*	*0.67*	*1.12*	*0.26*	*4.57*	*5.37*	*0.12*	*3.19*
1.63	*1.46*	*1.08*	*2.06*	*0.85*	*0.83*	*2.44*	*2.11*	*3.15*	*2.90*	*6.58*	*0.64*

Contraste la hipótesis de que los intervalos entre llegadas están distribuidos exponencialmente, empleando para ello el test de Kolmogorov-Smirnov.

SOLUCIÓN

La tabla de puntos críticos del test de K-S depende del tipo de distribución de probabilidad sobre la que se realiza el contraste de hipótesis. Es decir, el procedimiento del test es el mismo si se desea contrastar el ajuste a una distribución uniforme, normal, exponencial, etc. pero la tabla de puntos críticos es diferente. La Tabla T.3, situada al final del libro de teoría, contiene los puntos críticos del test de K-S para la distribución $\text{U}(0,1)$ (y no es válida para contrastar el ajuste de otras distribuciones).

Para aplicar el test de K-S, usando la Tabla T.3, a la hipótesis nula de que los intervalos entre llegadas del enunciado están distribuidos exponencialmente, es preciso realizar la consideración siguiente. Los datos han sido recogidos en el intervalo entre 0 y $T = 100$ minutos. Puede demostrarse que si la distribución de los intervalos entre llegadas $\{T_1, T_2, ...\}$ es exponencial, entonces los instantes de llegada están distribuidos uniformemente en el intervalo $(0, T)$. Los instantes de llegada (T_1, $T_1 + T_2$, $T_1 + T_2 + T_3$, ..., $T_1 + \cdots + T_{50}$) se calculan sumando los intervalos de tiempo entre llegadas. A continuación, es posible normalizar estos instante de llegada al intervalo $(0, 1)$, con el fin de poder aplicar el test de K-S con la tabla de valores críticos T.3.

Lo más conveniente es realizar pequeños programas que realicen los cálculos descritos a continuación. Los 50 instantes de llegada resultantes son los siguientes:

0.0044	0.0097	0.0301	0.0575	0.0775	0.0805	0.1147	0.1111	0.1313	0.1502
0.1655	0.1676	0.1956	0.1960	0.2095	0.2927	0.3161	0.3356	0.3366	0.3508
0.3553	0.3561	0.3670	0.3746	0.4300	0.4694	0.4796	0.5027	0.5315	0.5382
0.5494	0.5520	0.5977	0.6514	0.6526	0.6845	0.7008	0.7154	0.7262	0.7468
0.7553	0.7636	0.7880	0.7982	0.8206	0.8417	0.8732	0.9022	0.9680	0.9744

Los números ya están ordenados: $R_{(1)} = 0.0044$, ..., $R_{(50)} = 0.9744$. El cálculo de D^+ y D^- se realiza de la forma siguiente:

$$
\begin{aligned}
D^+ &= \text{máx}\left\{\frac{1}{50} - R_{(1)}, \frac{2}{50} - R_{(2)}, \frac{3}{50} - R_{(3)}, \ldots, \frac{50}{50} - R_{(50)}\right\} \\
D^- &= \text{máx}\left\{R_{(1)} - \frac{1-1}{50}, R_{(2)} - \frac{2-1}{50}, R_{(3)} - \frac{3-1}{50}, \ldots, R_{(50)} - \frac{50-1}{50}\right\}
\end{aligned}
$$

Obteniéndose: $D^+ = 0.1054$ y $D^- = 0.0080$. Por consiguiente, el estadístico del test de K-S es $D = \text{máx}\{0.1054, 0.0080\} = 0.1054$. El valor crítico de D se obtiene de la Tabla T.3, situada al final del libro de teoría:

$$\alpha = 0.05,\ n = 50 \ \rightarrow\ D_{0.05} = \frac{1.36}{\sqrt{n}} = 0.1923$$

Puesto que $D = 0.1054 < D_{0.05} = 0.1923$, el test no rechaza la hipótesis de que los intervalos entre llegadas están distribuidos exponencialmente.

Problema 8.7

Entre los ejercicios del Capítulo 6, se propuso el modelado de un servicio de atención telefónica completamente automatizado, cuya función es informar al cliente acerca de tres tipos de producto: A, B y C. La llegada de llamadas al sistema era un proceso de Poisson estacionario, con una frecuencia de una llamada por minuto.

Considérese ahora que el sistema funciona durante 10 horas al día (de 8 AM a 6 PM), y que la frecuencia de llegada de llamadas al sistema varía a lo largo del día (lo cual es muy típico en este tipo de sistemas). En la tabla siguiente se muestra el valor de la frecuencia, expresa en llamadas por hora, para cada periodo de 30 minutos durante el cual el servicio está en funcionamiento.

Periodo	***Frec.***	***Periodo***	***Frec.***	***Periodo***	***Frec.***	***Periodo***	***Frec.***
8:00 - 8:30	*20*	*10:30 - 11:00*	*75*	*1:00 - 1:30*	*110*	*3:30 - 4:00*	*90*
8:30 - 9:00	*35*	*11:00 - 11:30*	*75*	*1:30 - 2:00*	*95*	*4:00 - 4:30*	*70*
9:00 - 9:30	*45*	*11:30 - 12:00*	*90*	*2:00 - 2:30*	*105*	*4:30 - 5:00*	*65*
9:30 - 10:00	*50*	*12:00 - 12:30*	*95*	*2:30 - 3:00*	*90*	*5:00 - 5:30*	*45*
10:00 - 10:30	*70*	*12:30 - 1:00*	*105*	*3:00 - 3:30*	*85*	*5:30 - 6:00*	*30*

Condiciones iniciales: al iniciarse el día, no hay ninguna llamada en el sistema.

Condición de finalización: desea simularse el sistema durante las 10 horas que permanece en funcionamiento cada día.

Objetivo del estudio: estimar el número total de "llamadas perdidas", es decir, el número total de llamadas que no han podido ser atendidas por encontrarse todas las líneas ocupadas.

SOLUCIÓN

Para describir el proceso de llegada no estacionario es preciso modificar las propiedades del módulo "Create" denominado *"Llegada de llamadas"* (ver la Figura 6.50). Para ello, es preciso indicar que el tipo ("Type") del tiempo entre llegadas ("Time between arrivals") es "Schedule", e indicar el nombre de la planificación. El nombre de la planificación puede escogerse libremente, por ejemplo: *Llegada llamadas*. Las llamadas llegan de una en una, con lo cual "Entities per arrival" debe dejarse igual a uno.

Haciendo "clic" sobre el módulo de datos "Schedule", del panel "Basic Process", se comprueba que Arena ha añadido la fila correspondiente a la planificación. La planificación especifica cómo varía la media de la distribución exponencial que representa el intervalo de tiempo entre llegadas sucesivas.

La definición de la planificación de un proceso de llegada consiste en:

- En la casilla correspondiente a la columna "Type", debe seleccionarse "Arrival".
- Puesto que la frecuencia de llegada está expresada en periodos de media hora, resulta conveniente escoger "Halfhours" como unidades de tiempo (columna "Time Units").
- La frecuencia siempre se expresa en *número de llegadas por hora*. Pulsando con el botón derecho del ratón sobre la casilla de la columna "Durations", y seleccionando "Edit via Spreadsheet", pueden introducirse los datos en forma de tabla:

Value:	20	35	45	50	70	75	90	95	105	110	95	105	90	85	90	70	65	45	30
Duration:	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Es preciso modificar la longitud de cada réplica, ya que en este estudio se supone que el servicio funciona durante 10 horas al día. También debe cambiarse de 8 a 10 el número de horas que componen el día.

Ejecutando una réplica de la simulación, se obtiene que de las 736 llamadas que han abandonado el sistema en el día, 375 de ellas han sido llamadas perdidas, es decir, aproximadamente el 50 %.

Problema 8.8

Usando la herramienta Input Analyzer, abra una nueva ventana y genere un nuevo fichero de datos que contenga 50 observaciones de una distribución Erlang con parámetros: ExpMean $= 12$, $k = 3$ *y Offset* $= 5$*. Para ello debe usarse la opción: File / Data File / Generate New.*

Una vez obtenido el fichero, ejecute: Fit / Fit All, para obtener el mejor ajuste entre las distribuciones disponibles. Repita el proceso para 500, 5000 *y* 25000 *observaciones, usando los mismos parámetros de la distribución Erlang. Compare los resultados del ajuste para las cuatro muestras de datos.*

SOLUCIÓN

Según se indica en el enunciado, debe emplearse el *Input Analyzer* para generar los conjuntos de observaciones y realizar los ajustes. Los resultados obtenidos son muy dependientes de cómo se generen las observaciones. Cuando se emplea el *Input Analyzer* para generar[5] varios conjuntos de observaciones aleatorias, se emplea la secuencia por defecto de números seudo aleatorios, con el valor por defecto de la semilla, para generar el primer conjunto de observaciones. Para obtener el segundo conjunto de observaciones se emplea la misma secuencia de números seudo aleatorios, pero comenzando en el punto donde acabó el primer conjunto. Por este motivo, si se generan los conjuntos de datos en diferente orden, pueden obtenerse resultados bastante diferentes, particularmente para los conjuntos con menor número de datos.

Las siguientes conjuntos de datos han sido obtenidos cerrando el *Input Analyzer* después de generar cada uno de ellos. Así pues, los primeros 50 puntos son los mismos para todos los conjunto, los primeros 500 son los mismos para los tres últimos conjuntos, etc. Los resultados obtenidos de realizar los ajustes son los siguientes:

50 Puntos:

```
Distribution Summary

Distribution: Triangular
Expression: TRIA(13, 15.2, 85)
Square Error: 0.004360

Chi Square Test
  Number of intervals = 5
  Degrees of freedom  = 3
  Test Statistic      = 1.15
  Corresponding p-value > 0.75

Kolmogorov-Smirnov Test
  Test Statistic = 0.0678
  Corresponding p-value > 0.15

Data Summary

Number of Data Points = 50
Min Data Value        = 13.5
Max Data Value        = 84.5
```

[5]El *Input Analyzer* usa un generador de números seudo aleatorios diferente del que usa Arena.

```
Sample Mean          = 37.7
Sample Std Dev       = 16.7

Histogram Summary

Histogram Range     = 13 to 85
Number of Intervals = 7
```

500 Puntos:

```
Distribution Summary

Distribution: Weibull
Expression: 8 + WEIB(35, 1.65)
Square Error: 0.003979

Chi Square Test
  Number of intervals = 14
  Degrees of freedom  = 11
  Test Statistic      = 22.5
  Corresponding p-value = 0.0221

Kolmogorov-Smirnov Test
  Test Statistic = 0.0359
  Corresponding p-value > 0.15

Data Summary

Number of Data Points = 500
Min Data Value       = 8.94
Max Data Value       = 131
Sample Mean          = 39.3
Sample Std Dev       = 19.6

Histogram Summary

Histogram Range     = 8 to 132
Number of Intervals = 22
```

5000 puntos:

```
Distribution Summary

Distribution: Gamma
Expression: 6 + GAMM(12.8, 2.73)
Square Error: 0.000122

Chi Square Test
  Number of intervals = 30
  Degrees of freedom  = 27
  Test Statistic      = 17
  Corresponding p-value > 0.75

Kolmogorov-Smirnov Test
  Test Statistic = 0.00971
  Corresponding p-value > 0.15

Data Summary

Number of Data Points = 5000
Min Data Value       = 6.73
Max Data Value       = 156
Sample Mean          = 41
Sample Std Dev       = 21

Histogram Summary

Histogram Range     = 6 to 157
Number of Intervals = 40
```

25000 Puntos:

```
Distribution Summary

Distribution: Erlang
Expression: 5 + ERLA(12, 3)
Square Error: 0.000041

Chi Square Test
  Number of intervals = 30
  Degrees of freedom  = 27
  Test Statistic      = 28.5
  Corresponding p-value = 0.395

Data Summary

Number of Data Points = 25000
Min Data Value        = 5.5
Max Data Value        = 192
Sample Mean           = 41.1
Sample Std Dev        = 21

Histogram Summary

Histogram Range     = 5 to 192
Number of Intervals = 40
```

Tema 9

Generación de números aleatorios

Problema 9.1

Aplique el algoritmo de corrección del sesgo, propuesto por von Neumann, a la siguiente secuencia de bits:

0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1

SOLUCIÓN

El algoritmo de corrección del sesgo de von Neumann, consiste en los pasos siguientes. Se leen los bits de dos en dos.

- Si existe una transición entre sus valores (es decir, los bits son 01 ó 10), el primero de ellos se considera un bit aleatorio y el segundo se descarta.
- Si no existe transición entre los dos bits (es decir, son 00 ó 11), entonces se descartan los dos bits y se leen los dos siguientes.

Aplicándolo a la secuencia dada en el enunciado, se obtiene:

0 1 1 0 0 1 0 1 1 1

Problema 9.2

Programe el generador de los cuadrados medios, usando un lenguaje de programación de su elección. A continuación ejecútelo: escoja un número de 4 dígitos como semilla, y genere una secuencia de 10 números seudo aleatorios.

SOLUCIÓN

El algoritmo, aplicado a números de 4 dígitos, consiste en elevar al cuadrado el último número de la secuencia, z_i^2, y conservar los 4 dígitos centrales. El siguiente programa, escrito en lenguaje S, generar una secuencia de n números aleatorios aplicando el algoritmo:

```
x <- 1234;
n <- 10;
for (i in c(2:n)) {
   aux1 <- as.integer(x[i-1]^2/100);
   aux2 <- 10000*(aux1/10000 - as.integer(aux1/10000));
   x <- c(x, aux2);
   }
```

Ejecutando el programa, tomando como semilla el número 1234, se obtiene la siguiente secuencia:

$$1234 \quad 5227 \quad 3215 \quad 3362 \quad 3030 \quad 1809 \quad 2724 \quad 4201 \quad 6484 \quad 422$$

Calculando el cuadrado de los números de la secuencia, puede comprobarse que se han realizado correctamente lo cálculos.

1522756	27321529	10336225	11303044	9180900
3272481	7420176	17648401	42042256	178084

Problema 9.3

Programe el generador congruencial lineal, usando un lenguaje de programación de su elección. Ejecute el programa para obtener una secuencia de 10 números seudo aleatorios a partir del generador siguiente: $a = 17$, $c = 43$ *y* $m = 100$. *Emplee como semilla:* $z_0 = 27$.

SOLUCIÓN

El programa, escrito en lenguaje S, es el siguiente:

```
n <- 10;
x <- 27;
a <- 17;
c <- 43;
m <- 100;
for (i in c(2:n)) {
   x <- c(x, (a*x[i-1]+c)%%m);
   }
x <- x/m;
```

Ejecutándolo, se obtiene la siguiente secuencia de números seudo aleatorios:

$$0.27 \quad 0.02 \quad 0.77 \quad 0.52 \quad 0.27 \quad 0.02 \quad 0.77 \quad 0.52 \quad 0.27 \quad 0.02$$

Como puede observarse, para esa elección de la semilla el periodo es realmente pequeño.

Problema 9.4

Realice un programa que, trabajando conjuntamente con el programa que ha realizado en el Problema 9.3, calcule el periodo del generador. Aplíquelo al caso particular siguiente: usando el método congruencial multiplicativo, calcule el periodo del generador definido por los siguientes parámetros: $a = 13$, $m = 2^6 = 64$, *para los siguientes 4 valores de la semilla:* $z_0 = 1, 2, 3$ *y* 4.

SOLUCIÓN

En los generadores congruenciales lineales, para el cálculo de un número sólo se emplea el número anterior de la secuencia. Por tanto, cuando el primer número de la secuencia se repita, se ha completado un periodo. La siguiente función en lenguaje S realiza este cálculo. El argumento de la función es un vector de números, es decir, la salida del programa descrito en el Problema 9.3.

```
periodo <- function(x) {
   ind <- c(1:length(x))[x == x[1]];
   if (length(ind)==1) return(0) else return(ind[2]-1);
   }
```

La obtención de la secuencia de números seudo aleatorios y la llamada a la función para el cálculo del periodo se realiza de la forma siguiente (particularizada al caso de $z_0 = 1$):

```
n <- 65;
x <- 1;
a <- 13;
c <- 0;
m <- 64;
for (i in c(2:n)) {
   x <- c(x, (a*x[i-1]+c)%%m);
}
x <- x/m;
periodo(x);
```

Los resultados obtenidos son los siguientes:

semilla	1	2	3	4
periodo	16	8	16	4

Problema 9.5

Programe el generador de Fibonacci, usando un lenguaje de programación de su elección, y empléelo para generar 100 números seudo aleatorios con: $m = 1000$, $z_0 = 1$ *y* $z_1 = 1$. *A continuación, aplique los siguientes tests estadísticos, con* $\alpha = 0.05$:

a) *Test chi-cuadrado.*

b) *Test de Kolmogorov-Smirnov.*

c) *Ajuste una distribución uniforme a la secuencia generada, empleando la herramienta Input Analyzer de Arena.*

d) *Someta la secuencia a los siguientes dos tests de las carreras: carreras crecientes y decrecientes, y carreras por encima y por debajo de la media.*

e) *Someta la secuencia al test de autocorrelación.*

Problema 9.6

Programe un generador de Tausworthe, usando un lenguaje de programación de su elección, de modo que (agrupando los bits) el resultado del programa sea una secuencia de dígitos decimales (números enteros comprendidos entre 0 y 9 inclusive).

Empleando el programa realizado, obtenga una secuencia 100 de dígitos decimales, mediante un generador de Tausworthe con $c_2 = c_4 = 1$, *y el resto de coeficientes cero.*

Finalmente, aplique a esta secuencia el test de los huecos, con $\alpha = 0.05$, *para contrastar la hipótesis de independencia.*

Problema 9.7

Explique cómo aplicar la técnica de la división simulada al siguiente generador: $z_{i+1} = 7^5 \cdot z_i$.

SOLUCIÓN

El generador $z_{i+1} = 7^5 \cdot z_i$ fue propuesto en el año 1969, y tenía la propiedad de que permitía aplicar la técnica de la división simulada en los registros de 32 bits de los ordenadores IBM System/360 (de los 32 bits, el bit más significativo era el bit de signo). El generador tiene periodo $m-1$, es decir, en un periodo aparece una vez cada uno de los enteros $\{1, 2, ..., m-1\}$.

El producto $a \cdot z_i$ puede representarse de la forma siguiente (en este caso, $a = 7^5 = 16807$):

$$a \cdot z_i = 2^{31} \cdot q_i + r_i \tag{9.1}$$

donde q_i es el cociente de dividir $a \cdot z_i$ por 2^{31}, y r_i es el resto, $0 \leq r_i < 2^{31}$. Manipulando la Ecuación (9.1), se demuestra que si no existe rebose en la suma $q_i + r_i$, entonces:

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= a \cdot z_i \cdot \left(\text{mod } 2^{31} - 1\right) \\ &= q_i + r_i \end{aligned} \tag{9.2}$$

Si existe rebose, entonces debe restarse $2^{31} - 1$ de $q_i + r_i$ para obtener el valor correcto de z_{i+1}. Alternativamente, esto puede realizarse sumando 1 y tomando el módulo 2^{31}:

$$z_{i+1} = q_i + r_i + 1 \left(\text{mod } 2^{31}\right) \tag{9.3}$$

donde el módulo 2^{31} puede calcularse simplemente conservando los 31 bits menos significativos de $q_i + r_i + 1$. Obsérvese que para que un programa pueda sacar partido de la división simulada, debe estar escrito en ensamblador o en lenguaje máquina.

Tema 10

Generación de observaciones de variables aleatorias

Problema 10.1

Realice un programa que genere observaciones de una distribución exponencial a partir de números seudo aleatorios. Emplee el lenguaje de programación que desee.

A continuación, ejecute el programa de generación de números seudo aleatorios para los datos del generador descrito en el Problema 9.3, con la semilla $z_0 = 20$, hasta obtener un periodo completo, y a partir de esa secuencia de números seudo aleatorios, obtenga observaciones de una variable aleatoria distribuida exponencialmente con media 1 minuto, usando el programa que acaba de realizar.

Finalmente, dibuje el histograma de las observaciones exponenciales. Además ajuste una distribución uniforme a la secuencia de números seudo aleatorios, y una distribución exponencial a la secuencia de observaciones exponenciales. Emplee para ello la herramienta Input Analyzer.

SOLUCIÓN

La siguiente función, escrita en lenguaje S, admite como argumentos un vector x y un real, β ($beta$), y devuelve el vector $y = -\beta \cdot \ln(x)$.

```
observExpo <- function(x,beta) {
   return( -beta*log(x) );
   }
```

Antes de realizar la llamada a función:

```
y <- observExpo(x,beta=1);
```

se calcula el periodo del generador para ese valor de la semilla, empleando para ello el programa realizado en el Problema 9.4. El periodo es igual a 20. El siguiente programa genera las $n = 20$ observaciones distribuidas uniformemente (vector x), y las transforma en observaciones distribuidas exponencialmente (vector y):

```
n <- 20;
x <- 20;
a <- 17;
c <- 43;
m <- 100;
```

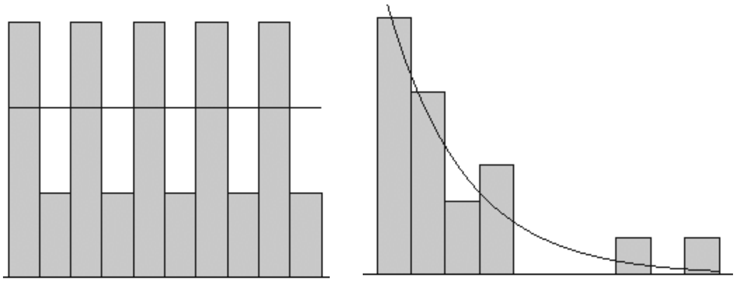


Figura 10.1: Histogramas y ajuste a una distribución uniforme (izqda) y exponencial (drcha).

```
for (i in c(2:n)) {
   x <- c(x, (a*x[i-1]+c)%%m);
   }
x <- x/m;
y <- observExpo(x,beta=1);
```

Se obtienen los resultados siguientes:

```
> x
 [1] 0.20 0.83 0.54 0.61 0.80 0.03 0.94 0.41 0.40 0.23 0.34 0.21 0.00
[14] 0.43 0.74 0.01 0.60 0.63 0.14 0.81
> y
 [1] 1.6094379 0.1863296 0.6161861 0.4942963 0.2231436 3.5065579
 [7] 0.0618754 0.8915981 0.9162907 1.4696760 1.0788097 1.5606477
[13]       Inf 0.8439701 0.3011051 4.6051702 0.5108256 0.4620355
[19] 1.9661129 0.2107210
```

Al transformar el número seudo aleatorio 0.00 se obtiene una observación de la distribución exponencial que vale infinito ($y\,[13] =$ Inf) (el logaritmo neperiano de cero es menos infinito). Esta es una situación ante la cual hay que estar preparado cuando se generan observaciones de distribuciones no acotadas. Si se estuviera empleando esta secuencia para generar observaciones de un proceso de llegada[1], debería transcurrir un tiempo infinito hasta que se produjera la siguiente llegada, o lo que es lo mismo, ya no se producirían más llegadas de ese tipo en toda la simulación.

Para cargar las observaciones en Input Analyzer, primero hay que grabar el contenido de los vectores x e y en sendos ficheros de texto. La observación Inf se ha eliminado, con lo cual sólo se analizarán 19 observaciones de la distribución exponencial. En la Figura 10.1 se muestran los histogramas. En cada caso se ha dibujado el histograma con 5 intervalos y con 10. Los resúmenes de los datos que muestra Input Analyzer al realizar los ajustes son los siguientes:

Ajuste de una distribución uniforme a los datos de x

```
Distribution Summary

Distribution: Uniform
Expression: UNIF(-0.001, 1)
Square Error: 0.025000

Chi Square Test
  Number of intervals = 3
  Degrees of freedom  = 2
```

[1]Un generador con un periodo tan pequeño no tiene aplicación en simulación. Se trata simplemente de un ejemplo académico.

```
  Test Statistic      = 0.5
  Corresponding p-value > 0.75

Kolmogorov-Smirnov Test
  Test Statistic = 0.12
  Corresponding p-value > 0.15

Data Summary

Number of Data Points = 20
Min Data Value        = 0
Max Data Value        = 0.94
Sample Mean           = 0.445
Sample Std Dev        = 0.296

Histogram Summary

Histogram Range     = -0.001 to 1
Number of Intervals = 10
```

Ajuste de una distribución exponencial a los datos de y

```
Distribution Summary

Distribution: Exponential
Expression: EXPO(1.13)
Square Error: 0.016466


Kolmogorov-Smirnov Test
  Test Statistic = 0.0991
  Corresponding p-value > 0.15

Data Summary

Number of Data Points = 19
Min Data Value        = 0.0619
Max Data Value        = 4.61
Sample Mean           = 1.13
Sample Std Dev        = 1.18

Histogram Summary

Histogram Range     = 0 to 5
Number of Intervals = 10
```

Un posible criterio a la hora de valorar la bondad de un ajuste es suponer que si el *p-value* es superior a 0.1, entonces el test no rechaza la hipótesis de que los datos han podido ser muestreados de la distribución. Este es el caso de los números de los vectores x e y. El *p-value* representa la probabilidad de muestrear de la distribución un conjunto de observaciones que se ajusten peor a la distribución que los datos a los que se aplica el test.

Problema 10.2

Se han realizado 100 observaciones del tiempo necesario para reparar una máquina. Los datos obtenidos son los siguientes[2]*:*

Tiempo (horas)	*Número de observaciones*
$0 \leq x \leq 0.5$	31
$0.5 < x \leq 1.0$	10
$1.0 < x \leq 1.5$	25
$1.5 < x \leq 2.0$	34

[2]Este problema ha sido extraído del texto (Banks et al. 1996).

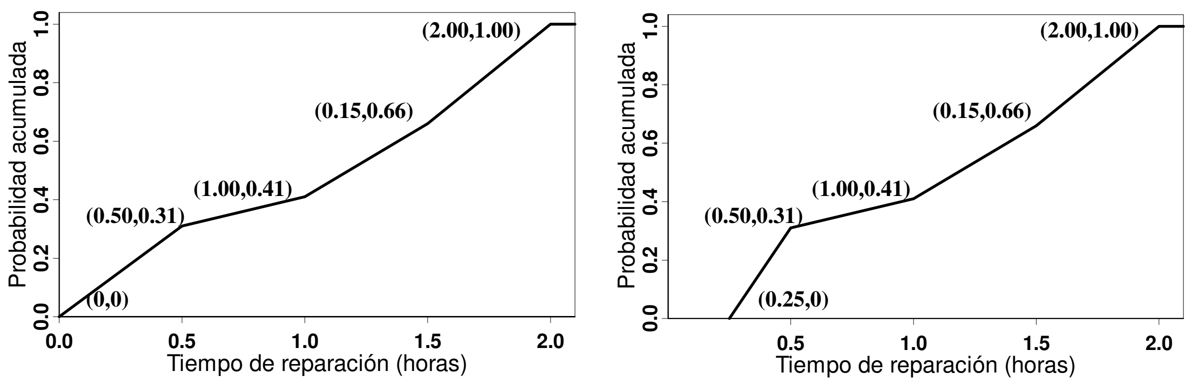


Figura 10.2: Probabilidad acumulada empírica de los tiempos de reparación.

a) *A partir de estos datos, defina la probabilidad acumulada empírica.*

b) *Se sabe que, por muy rápido que se realice una reparación, dura al menos 15 minutos. Defina la probabilidad acumulada empírica, truncando el rango de la variable aleatoria al intervalo* $[0.5, 2]$ *horas.*

c) *Explique detalladamente cómo aplicar el método de la transformación inversa para generar observaciones de esta distribución empírica truncada.*

SOLUCIÓN

La probabilidad acumulada empírica puede definirse con ayuda de la tabla mostrada a continuación. La distribución empírica obtenida se ha dibujado en la parte izquierda de la Figura 10.2. Se ha obtenido a partir de la información de la tabla: cada intervalo define dos puntos en la gráfica, que se han conectado mediante una línea recta (la interpolación lineal no es la única posibilidad, pero si es la más sencilla). Los cuatro intervalos resultan en cinco pares de puntos, que definen cuatro segmentos lineales.

Tiempo (horas) (horas)	Número de observaciones	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada
$0 \leq x \leq 0.5$	31	0.31	0.31
$0.5 < x \leq 1.0$	10	0.10	0.41
$1.0 < x \leq 1.5$	25	0.25	0.66
$1.5 < x \leq 2.0$	34	0.34	1.00

La distribución empírica satisface: $\hat{F}_X(x) = 0$ para $x < 0$, y $\hat{F}_X(x) = 1$ para $x > 2$. Por tanto, se supone que la variable aleatoria "tiempo de reparación", X, puede tomar valores arbitrariamente próximos a cero. Esta suposición no es realista.

Supóngase que el tiempo mínimo necesario para realizar una reparación son 15 minutos, de modelo que el rango de X es el intervalo $[0.25, 2]$. En este caso, el punto $(0, 0)$ debe sustituirse por el punto $(0.25, 0)$, como se muestra en la parte derecha de la Figura 10.2.

La técnica de la transformación inversa puede emplearse para generar observaciones del tiempo de reparación. Para ello, primero hay que generar un número aleatorio u, por ejemplo $u = 0.83$, y leer el valor de X a que da lugar en el gráfico de la parte derecha de la Figura 10.2: $x = F_X^{-1}(u)$. Puesto que u está entre 0.66 y 1.00, es preciso calcular x de la interpolación lineal entre 1.5 y 2.0; esto es:

$$x = 1.5 + \left[\frac{u - 0.66}{1.00 - 0.66} \right] \cdot (2.0 - 1.5) = 1.75$$

Para todos los valores de u en el intervalo $(0.66, 1.00)$, es preciso emplear el valor $a_4 = \frac{2.0-1.5}{1.00-0.66}$ para calcular x. El valor a_4 es la pendiente $\frac{\Delta x}{\Delta u}$ de la función $x = \hat{F}_X^{-1}(u)$. Las pendientes de los cuatro segmentos de línea son:

$$a_1 = \frac{0.5 - 0.25}{0.31 - 0.00} = 0.81 \qquad a_2 = \frac{1.0 - 0.5}{0.41 - 0.31} = 5.00$$
$$a_3 = \frac{1.5 - 1.0}{0.66 - 0.41} = 2.00 \qquad a_4 = \frac{2.0 - 1.5}{1.00 - 0.66} = 1.47$$

El algoritmo para generar observaciones de X, empleando el método de la transformación inversa, es el siguiente:

1. Generar u.
2. Calcular el intervalo i en el cual está u. Es decir, calcular i tal que $u_i \leq u \leq u_{i+1}$, donde: $u_1 = 0$, $u_2 = 0.31$, $u_3 = 0.41$, $u_4 = 0.66$ y $u_5 = 1.00$.
3. Calcular x de la expresión siguiente:

$$x = x_i + a_i \cdot (u - u_i)$$

donde: $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 1.0$, $x_4 = 1.5$ y $x_5 = 2.0$.

Como ejemplo, supóngase que $u = 0.33$. Puesto que u está en el intervalo de pendiente a_2:

$$x = x_2 + a_2 \cdot (u - u_2) = 0.5 + 5.0 \cdot (0.33 - 0.31) = 0.66$$

Problema 10.3

Se ha observado que una variable aleatoria discreta puede tomar los valores 0, 1 *y* 2, *con probabilidad* 0.50, 0.20 *y* 0.30 *respectivamente. Describa cómo aplicaría el método de la transformación inversa para generar observaciones de esa distribución empírica discreta*[3].

SOLUCIÓN

La probabilidad acumulada de una variable aleatoria discreta siempre consiste en segmentos horizontales de línea. Los saltos entre estos segmentos se producen en los valores que puede tomar la variable aleatoria, y tienen una altura igual a la probabilidad de que la variable tome ese valor. En la Figura 10.3 se muestra la probabilidad acumulada de la variable discreta, X, y también un ejemplo de generación de una observación de X empleando el método de la transformación inversa: $u = 0.73$ es transformado en $x = 1$.

La aplicación del método de la transformación inversa es análogo al caso de las variables aleatorias continuas, con la excepción de que en este caso se elimina el paso de la interpolación lineal. Es esquema de generación puede resumirse de la forma siguiente:

$$x = \begin{cases} 0, & \text{si } u \leq 0.5 \\ 1, & \text{si } 0.5 < u \leq 0.8 \\ 2, & \text{si } 0.8 < u \leq 1.0 \end{cases}$$

[3]Este problema ha sido extraído del texto (Banks et al. 1996).

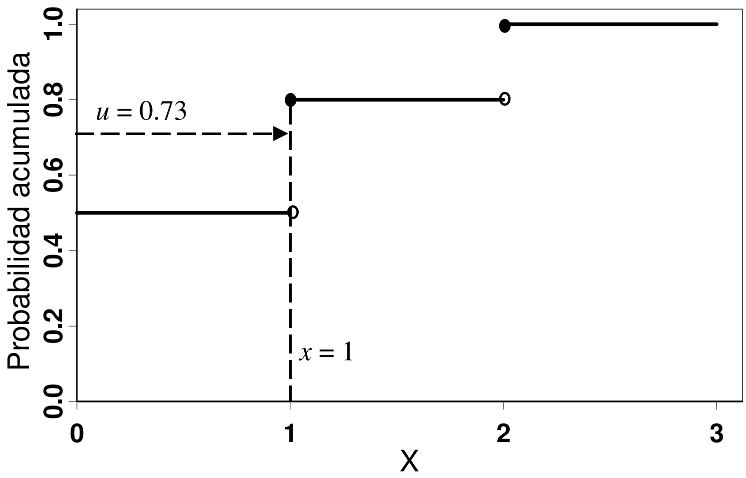


Figura 10.3: Probabilidad acumulada empírica de la variable aleatoria discreta.

Problema 10.4

La probabilidad de una variable aleatoria discreta X es la siguiente[4]*:*

$$p_X(x) = \frac{2 \cdot x}{k \cdot (k+1)} \text{ , para } x = 1, 2, \ldots, k$$

a) *Calcule la probabilidad acumulada de X.*

b) *Explique detalladamente cómo pueden obtenerse observaciones de X mediante el método de la transformación inversa.*

SOLUCIÓN

La probabilidad acumulada viene dada por la expresión siguiente:

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{x} \frac{2 \cdot i}{k \cdot (k+1)} = \frac{2}{k \cdot (k+1)} \sum_{i=1}^{x} i = \frac{2}{k \cdot (k+1)} \cdot \frac{x \cdot (x+1)}{2} = \frac{x \cdot (x+1)}{k \cdot (k+1)}$$

Para generar una observación de X, hay que generar un número aleatorio, u, y calcular x resolviendo la desigualdad siguiente:

$$F_X(x-1) = \frac{(x-1) \cdot x}{k \cdot (k+1)} < u \le \frac{x \cdot (x+1)}{k \cdot (k+1)} = F_X(x)$$

o lo que es lo mismo, resolviendo:

$$(x-1) \cdot x < u \cdot k \cdot (k+1) \le x \cdot (x+1)$$

[4]Este problema ha sido extraído del texto (Banks et al. 1996).

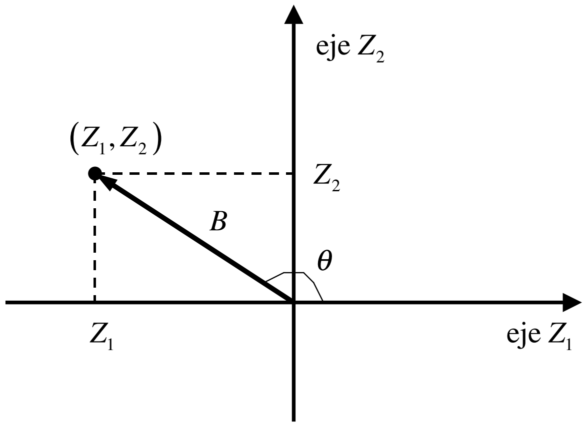


Figura 10.4: Representación de dos variables aleatorias como un punto en el plano.

Problema 10.5

Demuestre que el algoritmo de Box y Muller efectivamente genera observaciones de la distribución normal estándar.

SOLUCIÓN

Dos variables aleatorias normales estándar, Z_1 y Z_2, pueden representarse como un punto en el plano, tal como se muestra en la Figura 10.4. El punto se representa como (Z_1, Z_2) en coordenadas cartesianas, y mediante B (módulo) y θ (ángulo) en coordenadas polares. La relación entre ambas representaciones es la siguiente:

$$\begin{aligned} Z_1 &= B \cdot \cos(\theta) \\ Z_2 &= B \cdot \sin(\theta) \end{aligned} \tag{10.1}$$

Se sabe que $B^2 = Z_1^2 + Z_2^2$ está distribuida chi-cuadrado con 2 grados de libertad, lo que es equivalente a una distribución exponencial con media 2. Así pues, pueden generarse observaciones de B^2 a partir de números aleatorios de la misma forma que se generan muestras de una distribución exponencial con media 2:

$$B = \sqrt{-2 \cdot \ln(U)} \tag{10.2}$$

Por la simetría de la distribución normal, el ángulo θ está uniformemente distribuido entre 0 y $2 \cdot \pi$. Asimismo, el ángulo (θ) y el módulo (B), son mutuamente independientes. Combinando esto con las Ecuaciones (10.1) y (10.2), se obtiene el método para generar dos observaciones de la distribución normal estándar a partir de dos números aleatorios independientes, u_1 y u_2:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{-2 \cdot \ln(U_1)} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot U_2) \\ Z_2 &= \sqrt{-2 \cdot \ln(U_1)} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot U_2) \end{aligned} \tag{10.3}$$

Problema 10.6

Puede demostrarse que una variable aleatoria X, distribuida Erlang con parámetros (K, θ), es la suma de K variables aleatorias exponenciales independientes X_i (con $i = 1, \dots, K$), cada una de las cuales tiene una media igual a: $\frac{1}{K \cdot \theta}$. Explique cómo generar observaciones de X mediante el método de la convolución.

SOLUCIÓN

En el enunciado se indica que $X = \sum_{i:1}^{K} X_i$. La forma de generar observaciones de una distribución exponencial a partir de números aleatorios es $-\beta \cdot \ln(u)$. Como consecuencia de estos dos hechos, se concluye que puede generarse una observación de una variable aleatoria Erlang de la forma siguiente:

$$X = \sum_{i:1}^{K} X_i = \sum_{i:1}^{K} \frac{-1}{K \cdot \theta} \cdot \ln(u_i) = \frac{-1}{K \cdot \theta} \cdot \ln\left(\prod_{i:1}^{K} u_i\right)$$

Problema 10.7

Genere tres observaciones de una distribución de Poisson con media $\lambda = 0.2$. Emplee la siguiente secuencia de números seudo aleatorios:

$$0.4357 \qquad 0.4146 \qquad 0.8353 \qquad 0.9952 \qquad 0.8004$$

Parte IV

Empleo de los modelos de simulación

Tema 11

Análisis estadístico de los resultados de la simulación

Problema 11.1

Realice el estudio de simulación descrito a continuación[1]*, usando para ello el entorno de modelado Arena y la herramienta Arena Output Analyzer.*

La estructura lógica del sistema bajo estudio y sus aspectos numéricos son lo siguientes. A un sistema compuesto por dos máquinas llegan piezas para ser procesadas. El intervalo de tiempo entre llegadas está distribuido exponencialmente, con media 20 minutos. Al llegar, las piezas son enviadas a la Máquina 1 y procesadas. El tiempo de proceso sigue una distribución TRIA(4.5, 9.3, 11) minutos. A continuación, las máquinas son procesadas en la Máquina 2, donde el tiempo de proceso está distribuido TRIA(16.4, 19.1, 21.8). Las piezas son enviadas de nuevo a la Máquina 1, para ser procesadas una segunda vez (con el mismo tiempo de proceso). Seguidamente, las piezas abandonan el sistema.

Condiciones iniciales: no hay ninguna pieza en el sistema. Condición de finalización: simular el funcionamiento del sistema ininterrumpidamente durante 20000 minutos.

El estudio tiene un doble objetivo. En primer lugar, se desean estimar los dos siguientes estadísticos:

- *El número promedio de piezas en la cola de cada máquina.*
- *El tiempo de ciclo medio de las piezas.*

para el sistema tal como se ha descrito anteriormente, realizando para ello una única réplica de la simulación.

En segundo lugar, se desea comparar estos valores con los que se obtienen si el tiempo de proceso en el segundo paso por la Máquina 1 estuviera distribuido TRIA(6.7, 9.1, 13.6). Para realizar la comparación, deben hacerse 20 *réplicas de cada una de las versiones del modelo, y calcular el intervalo del 95 % de confianza de la diferencia entre las respuestas, usando Output Analyzer.*

SOLUCIÓN Parte A

En primer lugar se supone que la distribución del tiempo de proceso en la Máquina1 es TRIA(4.5, 9.3, 11) minutos, tanto en la primera pasada de la pieza como en la segunda. En la Figura 11.1 se muestra el diagrama de módulos del modelo. En el módulo "Assign" se define un atributo que contiene el número de veces que la pieza ha pasado por la Máquina 1 (ver

[1] Este estudio de simulación está extraído del texto (Kelton et al. 2002).

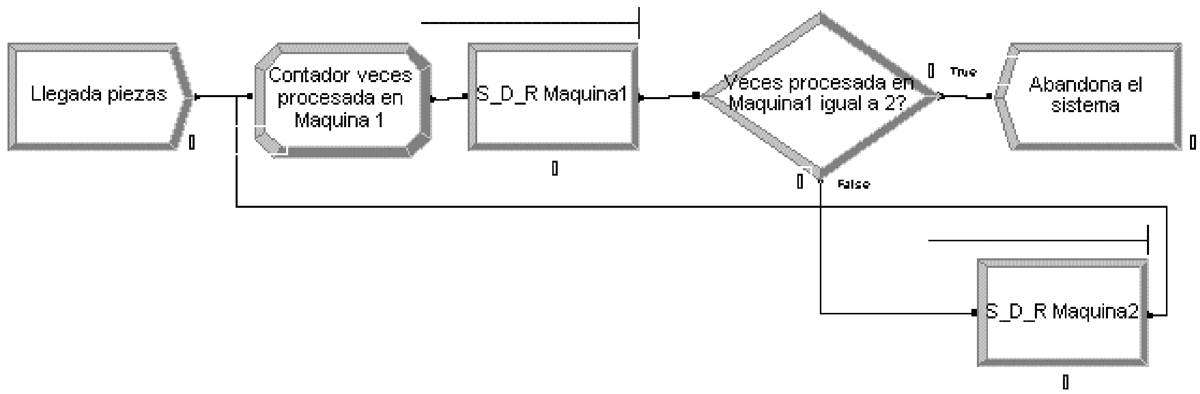


Figura 11.1: Diagrama de módulos.

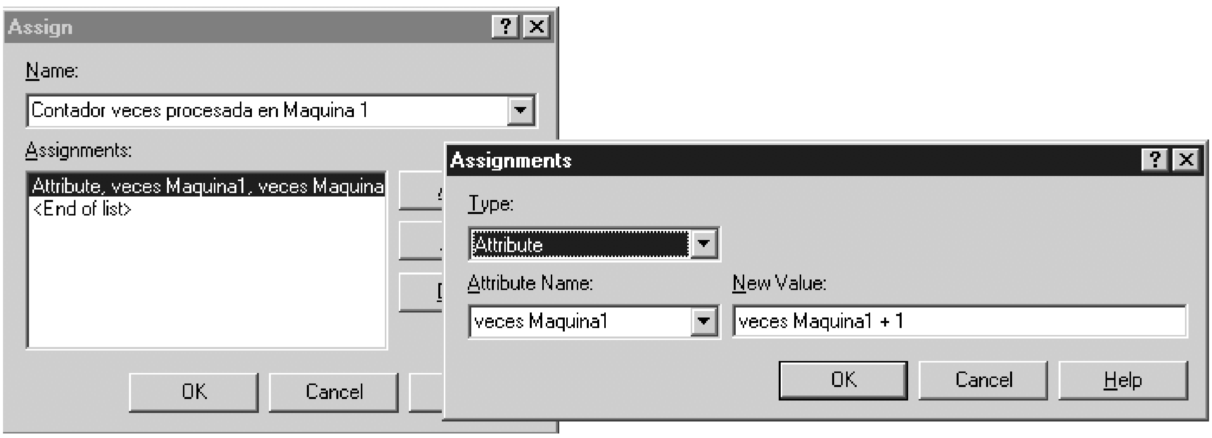


Figura 11.2: Asignación de valor al atributo.

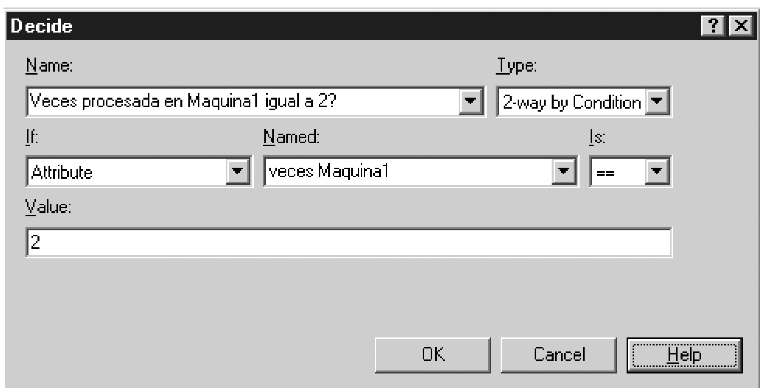


Figura 11.3: Condición de bifurcación basada en el valor del atributo.

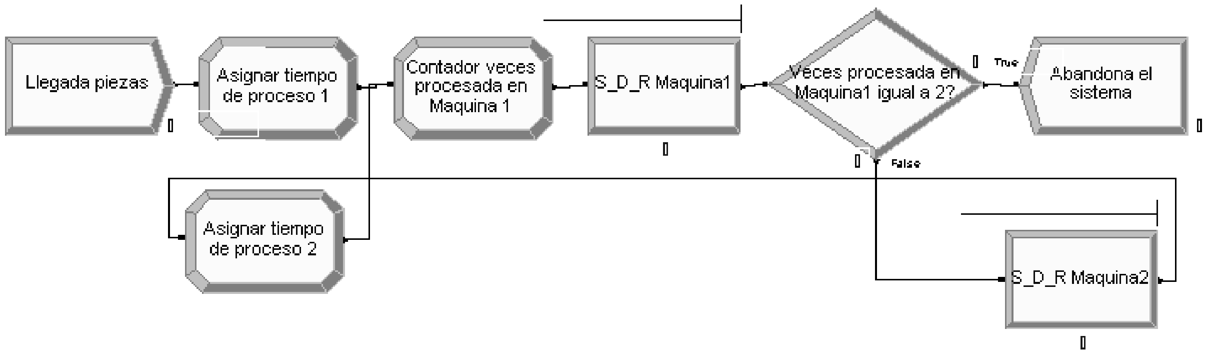


Figura 11.4: Diagrama de módulos.

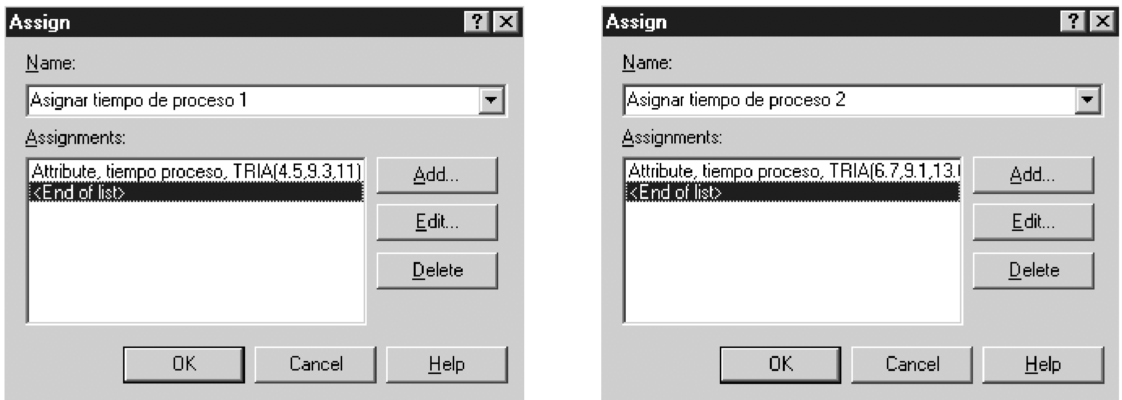


Figura 11.5: Definiciones del atributo *tiempo proceso*.

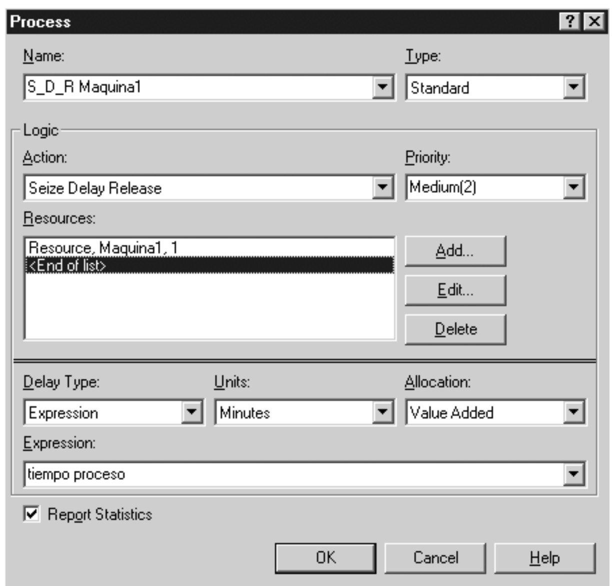


Figura 11.6: Proceso en la Máquina 1.

la Figura 11.2). El valor de este atributo se usa en el módulo "Decide" para determinar el camino que debe tomar la pieza (ver la Figura 11.3).

Los dos procesos se han modelado empleando módulos "Process" del panel "Basic Process". Las letras S_D_R en el nombre del módulo indican la acción que la entidad realiza en ellos: "Seize"-"Delay"-"Release". En cada uno de estos dos módulos se referencia un recurso: *Maquina1* y *Maquina2* respectivamente. La capacidad de estos dos recursos es constante, e igual a 1, con lo cual no es preciso modificar la definición que Arena hace de ellos por defecto.

Ejecutando una réplica de la simulación, de duración 20000 minutos, se obtienen los resultados siguientes:

- Average - pieza.TotalTime = 215.81
- Average - S_D_R Maquina1.Queue.NumberInQueue = 1.0109
- Average - S_D_R Maquina2.Queue.NumberInQueue = 8.3664

SOLUCIÓN Parte B

El tiempo de proceso en la Máquina 1 depende de si la pieza está siendo procesada por primera o segunda vez. Una posible forma se modelar esta característica es definir un nuevo atributo de la entidad que contenga el valor del tiempo de proceso en la Máquina 1. Al llegar la entidad al sistema, se asigna valor a este atributo de acuerdo a la distribución TRIA(4.5, 9.3, 11) minutos. En el módulo que describe el proceso en la Máquina 1, debe indicarse que el tiempo de la acción "Delay" es igual al valor del atributo. Finalmente, cuando la entidad circula desde la Máquina 2 a la Máquina 1, se asigna un nuevo valor al atributo, está vez distribuido TRIA(6.7, 9.1, 13.6).

En la Figura 11.4 se muestra el diagrama de módulos, en el que se han insertado los dos módulos "Assign" anteriormente citados. En la Figura 11.5 se muestra la definición de estos dos módulos; y en la Figura 11.6 la definición del proceso en la Máquina 1. Obsérvese que la duración de la acción "Delay" es igual al valor del atributo *tiempo proceso* de la entidad.

Realizando una única réplica de la simulación, de duración 20000 minutos, se obtienen los resultados siguientes:

- Average - pieza.TotalTime = 440.15
- Average - S_D_R Maquina1.Queue.NumberInQueue = 3.3065
- Average - S_D_R Maquina2.Queue.NumberInQueue = 17.959

Problema 11.2

A una delegación de Tráfico llegan dos tipos de clientes[2]*:*

- *Clientes interesados en temas relacionados con los vehículos (altas, bajas, matriculación, etc.). El intervalo de tiempo entre llegadas consecutivas de estos clientes está distribuido EXPO* (6.8)*, y los tiempos de servicio TRIA* $(8.7, 13.7, 15.2)$*. Todos los tiempos están expresados en minutos.*
- *Clientes interesados en temas relacionados con su carnet de conducir. El tiempo entre llegadas está distribuido EXPO* (8.7)*, y el tiempo de servicio TRIA* $(16.7, 20.5, 29.2)$*.*

Se forman dos colas: una para cada tipo de cliente. Hay cinco trabajadores: dos dedicados a los vehículos, otros dos dedicados a los conductores, y un supervisor, que puede atender a ambos tipos de clientes.

a) *Suponga que los 5 empleados trabajan 8 horas al día. Realice 30 réplicas de la simulación, y calcule los intervalos del* $95\,\%$ *de confianza del tiempo de ciclo medio de cada tipo de cliente.*

[2]Este estudio de simulación está extraído del texto (Kelton et al. 2002).

b) *Analice el sistema de nuevo, suponiendo que uno de los trabajadores que atiende los temas de los vehículos está también capacitado para atender los temas relacionados con los conductores. Realice 30 réplicas y estime el valor esperado de la diferencia entre esta configuración y la anterior (basándose en el tiempo de ciclo medio).*

Problema 11.3

Estime el número medio de piezas en cola, en el estado estacionario, del proceso de perforación descrito en el Problema 6.1.

Tema 12

Técnicas de reducción de la varianza

Este tema NO SE EXIGIRÁ EN EL EXAMEN.

Como actividad complementaria al estudio de la asignatura, se propone únicamente la lectura del contenido del tema, por ello no se plantean ejercicios prácticos.

Tema 13

Diseño de experimentos y optimización

Problemas 13.1

Se ha diseñado un experimento factorial completo con el fin de estudiar el efecto de los factores A, B y C sobre la respuesta S. Además, se han añadido dos réplicas del punto central de la región experimental, con el fin de estimar la curvatura de la respuesta. El motivo de realizar dos réplicas del punto central, en lugar de sólo una, es estimar la dispersión de la respuesta. La matriz experimental y los resultados del experimento son los siguientes:

A	***B***	***C***	***S***
60	*5*	*550*	*10.93*
60	*5*	*700*	*10.19*
60	*15*	*550*	*7.17*
60	*15*	*700*	*6.94*
180	*5*	*550*	*19.61*
180	*5*	*700*	*17.50*
180	*15*	*550*	*12.46*
180	*15*	*700*	*11.77*
120	*10*	*625*	*11.61*
120	*10*	*625*	*11.17*

Dibuje los gráficos de los efectos principales y de las interacciones. Extraiga conclusiones.

SOLUCIÓN

En la parte izquierda de la Figura 13.1 se muestran los gráficos de los efectos principales, en los que se han dibujado también los dos puntos centrales del diseño experimental. Los dos puntos centrales están próximos a la recta, lo cual indica que la curvatura de la respuesta en la región bajo estudio es despreciable: es apropiado modelar la dependencia de la respuesta respecto a los factores mediante una relación lineal.

El motivo de realizar dos réplicas del punto central es obtener una estimación de la dispersión de las observaciones. En este ejemplo la dispersión es pequeña. Si la dispersión fuera grande, no bastaría con realizar una única réplica de cada punto experimental: los resultados diferirían considerablemente entre réplicas, con lo que el resultado de una única réplica no sería representativo del comportamiento del sistema.

Los efectos principales de los tres factores son los siguientes:

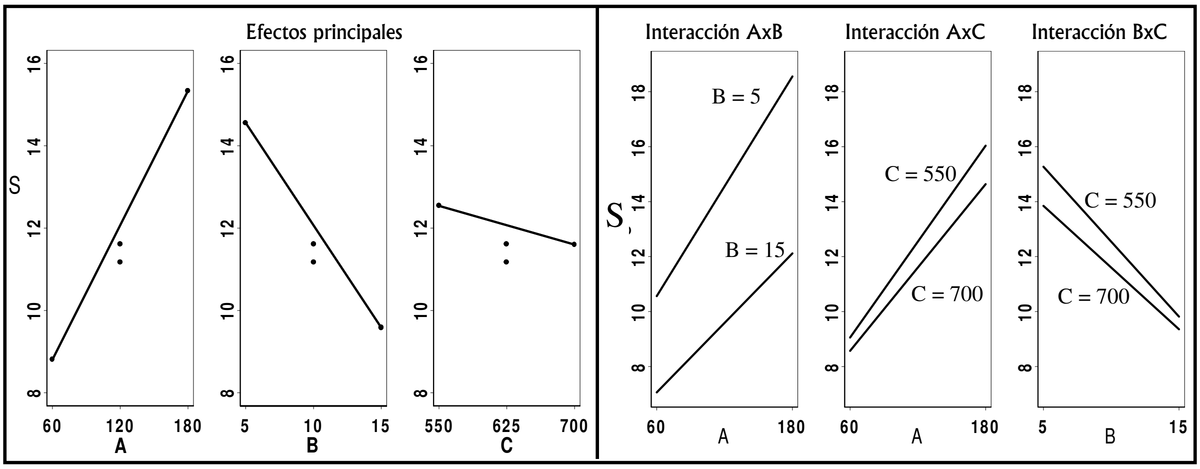


Figura 13.1: Efectos principales e interacciones (Problema 13.1).

Factor	Promedio de S al nivel ”–”	Promedio de S al nivel ”+”	Efecto (diferencia)
A	8.81	15.34	6.53
B	14.56	9.59	-4.97
C	12.54	11.60	-0.94

En la parte derecha de la Figura 13.1 se muestran los gráfico de interacción de los factores dos a dos. Puede observarse que las dos rectas en cada uno de los gráficos de interacción son prácticamente paralelas, con lo cual la interacción entre los factores es despreciable.

Así pues, el estudio proporciona una medida de la variación de S con cada uno de los parámetros, y además indica que no existe interacción entre ellos, es decir, las variaciones en la respuesta debido a cambios en el valor de los factores son aditivas.

Problema 13.2

Considere las 8 primeras observaciones experimentales mostradas en el Problema 13.1, es decir, los resultados del experimentos 2^3, y no considere las dos réplicas correspondientes al punto central. A partir de las 8 observaciones, calcule los coeficientes de un modelo compuesto por un término constante, tres términos de efectos principales, dos términos de interacción de los factores dos a dos, y un término de interacción de los tres factores. Es decir:

$$\begin{aligned} y_S &= \beta_0 \\ &+ \beta_A \cdot x_A + \beta_B \cdot x_B + \beta_C \cdot x_C \\ &+ \beta_{AB} \cdot x_A \cdot x_B + \beta_{AC} \cdot x_A \cdot x_C + \beta_{BC} \cdot x_B \cdot x_C \\ &+ \beta_{ABC} \cdot x_A \cdot x_B \cdot x_C \end{aligned}$$

Para ello realice la siguiente normalización. Asigne el valor $+1$ a x_i cuando el factor i se encuentre en el nivel superior, y el valor -1 cuando se encuentre en el nivel inferior.

¿Qué relación existe entre el término β_0 y el promedio de las observaciones?

¿Qué relación existe entre los coeficientes β_A, β_B, β_C, y los efectos principales?

¿Qué relación existe entre los coeficientes β_{AB}, β_{AC}, β_{BC} y los efectos de interacción?

SOLUCIÓN

Para calcular los valores de los coeficientes del modelo, puede establecerse el siguiente sistema de 8 ecuaciones con 8 incógnitas:

$$\begin{aligned}
10.93 &= \beta_0 - \beta_A - \beta_B - \beta_C + \beta_{AB} + \beta_{AC} + \beta_{BC} - \beta_{ABC} \\
10.19 &= \beta_0 - \beta_A - \beta_B + \beta_C + \beta_{AB} - \beta_{AC} - \beta_{BC} + \beta_{ABC} \\
7.17 &= \beta_0 - \beta_A + \beta_B - \beta_C - \beta_{AB} + \beta_{AC} - \beta_{BC} + \beta_{ABC} \\
6.94 &= \beta_0 - \beta_A + \beta_B + \beta_C - \beta_{AB} - \beta_{AC} + \beta_{BC} - \beta_{ABC} \\
19.61 &= \beta_0 + \beta_A - \beta_B - \beta_C - \beta_{AB} - \beta_{AC} + \beta_{BC} + \beta_{ABC} \\
17.50 &= \beta_0 + \beta_A - \beta_B + \beta_C - \beta_{AB} + \beta_{AC} - \beta_{BC} - \beta_{ABC} \\
12.46 &= \beta_0 + \beta_A + \beta_B - \beta_C + \beta_{AB} - \beta_{AC} - \beta_{BC} - \beta_{ABC} \\
11.77 &= \beta_0 + \beta_A + \beta_B + \beta_C + \beta_{AB} + \beta_{AC} + \beta_{BC} + \beta_{ABC}
\end{aligned}$$

Sumando las 8 ecuaciones, se cancelan todos los términos menos β_0, obteniéndose que el término constante β_0 es el promedio de las 8 observaciones:

$$\beta_0 = \frac{10.93 + 10.19 + 7.17 + 6.94 + 19.61 + 17.50 + 12.46 + 11.77}{8} = 11.935$$

Restando las 4 primeras ecuaciones de las 4 últimas, se cancelan todos los términos excepto el de β_A:

$$\beta_A = \frac{-10.93 - 10.19 - 7.17 - 6.94 + 19.61 + 17.50 + 12.46 + 11.77}{8} = 3.264$$

que es la mitad del efecto principal del factor A. Similarmente:

$$\begin{aligned}
\beta_B &= \frac{-10.93 - 10.19 + 7.17 + 6.94 - 19.61 - 17.50 + 12.46 + 11.77}{8} = -2.486 \\
\beta_C &= \frac{-10.93 + 10.19 - 7.17 + 6.94 - 19.61 + 17.50 - 12.46 + 11.77}{8} = -0.471 \\
\beta_{AB} &= \frac{+10.93 + 10.19 - 7.17 - 6.94 - 19.61 - 17.50 + 12.46 + 11.77}{8} = -0.734 \\
\beta_{AC} &= \frac{+10.93 - 10.19 + 7.17 - 6.94 - 19.61 + 17.50 - 12.46 + 11.77}{8} = -0.229 \\
\beta_{BC} &= \frac{+10.93 - 10.19 - 7.17 + 6.94 + 19.61 - 17.50 - 12.46 + 11.77}{8} = -0.241 \\
\beta_{ABC} &= \frac{-10.93 + 10.19 + 7.17 - 6.94 + 19.61 - 17.50 - 12.46 + 11.77}{8} = 0.114
\end{aligned}$$

El modelo es:

$$\begin{aligned}
y_S &= 11.935 + 3.264 \cdot x_A - 2.286 \cdot x_B - 0.471 \cdot x_C \\
&- 0.734 \cdot x_A \cdot x_B - 0.229 \cdot x_A \cdot x_C + 0.241 \cdot x_B \cdot x_C \\
&+ 0.114 \cdot x_A \cdot x_B \cdot x_C
\end{aligned}$$

En este caso, el número de parámetros del modelo es igual al número de puntos experimentales. Cuando el número de puntos experimentales es mayor que el número de parámetros, el valor de los parámetros puede obtenerse realizando un ajuste mediante el método de los mínimos cuadrados. Por el contrario, cuando el número de puntos experimentales es

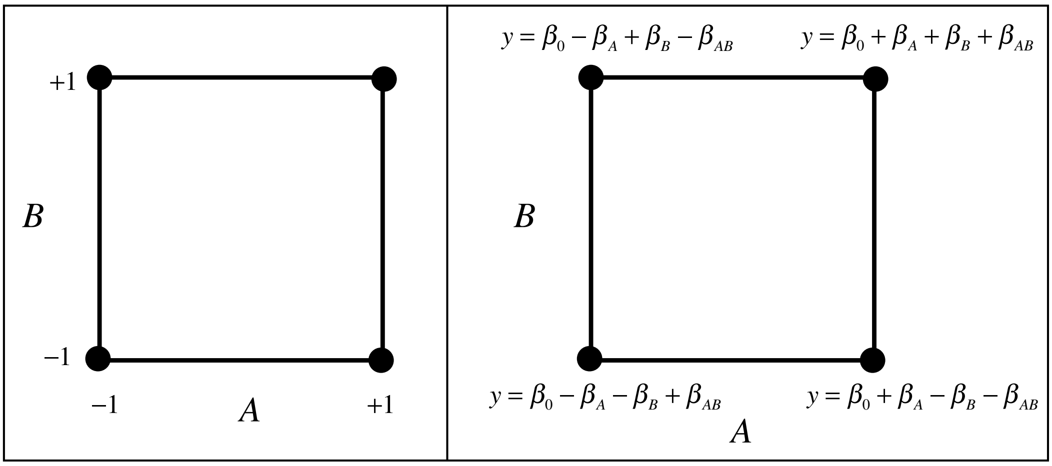


Figura 13.2: Diseño experimental. Niveles (izqda) y respuestas (drcha).

menor que el número de parámetros (como puede ser el caso de los experimentos factoriales fraccionales), entonces no puede estimarse el valor de todos los parámetros.

Si en un diseño 2^k factorial completo se codifican los niveles de los factores como $+1$ y -1, y se ajusta por mínimos cuadrados el modelo a los datos, entonces:

- La estimación por mínimos cuadrados del término constante, β_0, es el promedio de todas las observaciones.
- La estimación por mínimos cuadrados de β_i es la mitad del efecto principal de factor i. Es decir, es la mitad de la diferencia entre el promedio de las observaciones para el nivel $+1$ del factor, menos el promedio de todas las observaciones para el nivel -1 del factor.
- La estimación por mínimos cuadrados de β_{ij} es igual al efecto de interacción dividido por dos. Es decir, la diferencia entre las dos pendientes en el gráfico de interacción, dividido por dos.

Problema 13.3

¿Qué tipo de modelo se obtiene mediante un experimento factorial completo 2^2? Como en el Problema 13.2, considere que cada factor tiene dos niveles: $+1$ y -1. Construya la matriz experimental y el modelo.

SOLUCIÓN

Un diseño 2^2 factorial completo tiene dos factores, con dos niveles cada uno. La tabla del diseño experimental es la siguiente (ver la parte izquierda de la Figura 13.2):

A	**B**
-1	-1
$+1$	-1
-1	$+1$
$+1$	$+1$

El modelo contiene un término constante, el efecto principal de cada uno de los dos factores, y el término de interacción entre los dos factores:

$$y = \beta_0 + \beta_A \cdot x_A + \beta_B \cdot x_2 + \beta_{AB} \cdot x_1 \cdot x_2$$

En la parte derecha de la Figura 13.2 se muestra el diseño experimental, señalando la relación existente entre la respuesta y los coeficientes del modelo en cada punto.

Problema 13.4

¿Qué tipo de modelo se obtiene de un experimento factorial completo 2^4?

SOLUCIÓN

Un diseño 2^4 factorial completo tiene 4 factores, con 2 niveles cada uno. El modelo consiste en la suma de los siguientes términos:

- Término constante
- Efectos principales: A, B, C, D
- Interacciones de 2 factores: AB, AC, AD, BC, BD, CD
- Interacciones de 3 factores: ABC, ABD, ACD, BCD
- Interacciones de 4 factores: $ABCD$

Frecuentemente se desprecian las interacciones de orden 3 y 4, y se ajusta el modelo (consistente en la suma del término constante, los efectos principales y las interacciones de 2 factores) a los 16 datos experimentales. El ajuste se realiza mediante el método de los mínimos cuadrados, que es equivalente a realizar el calculo de la forma siguiente:

- El término constante, β_0, es el promedio de todas las observaciones.
- Los coeficientes β_A, β_B, β_C y β_D son la mitad del efecto principal de sus respectivos factores.
- Los coeficientes β_{AB}, β_{AC}, β_{AD}, β_{BC}, β_{BD}, β_{CD} son igual a la mitad de sus respectivos efectos de interacción.

Problema 13.5

Construya la matriz experimental de cada uno de los siguientes experimentos:

a) *Experimento factorial completo, con dos factores: A y B. El factor A tiene cuatro niveles:* 30, 50, 80 *y* 90*. El factor B tiene tres niveles:* 5, 10 *y* 30.

b) *Experimento* 2^3*, con tres factores: A, B, y C. Cada factor tiene dos niveles. Los niveles de A son* 2900 *y* 4100*. Los niveles de B son* 925 *y* 975*. Los de C son:* 4.0 *y* 4.8.

c) *Un experimento factorial completo* 2^2*, con tres réplicas del punto central. Los niveles del factor A son* 10 *y* 20*. Los del factor B son* 170 *y* 185.

SOLUCIÓN

La matriz de un experimento factorial completo 3×4, con dos factores: A y B, donde el factor A tiene cuatro niveles (30, 50, 80 y 90), y el factor B tiene tres niveles (5, 10 y 30) es la siguiente:

A	B
30	5
30	10
30	30
50	5
50	10
50	30
80	5
80	10
80	30
90	5
90	10
90	30

La matriz de un experimento 2^3, con tres factores: A (niveles: 2900 y 4100), B (niveles: 925 y 975) y C (niveles: 4.0 y 4.8), es la siguiente:

A	B	C
2900	925	4.0
2900	925	4.8
2900	975	4.0
2900	975	4.8
4100	925	4.0
4100	925	4.8
4100	975	4.0
4100	975	4.8

La matriz de un experimento factorial completo 2^2, con dos factores: A (niveles: 10 y 20) y B (niveles 170 y 185), y con 3 réplicas del punto central, es la siguiente:

A	B
170	10
185	10
170	20
185	20
177	15
177	15
177	15

Problema 13.6

Considere de nuevo el experimento factorial completo 2^3 del Problema 13.2. Suponga que no es posible realizar las 8 réplicas de las simulación, y que se opta por hacer un experimento factorial fraccional 2^{3-1}. Indique cómo diseñaría el experimento. Con este tipo de experimento, ¿pueden estimarse todos los términos del modelo mostrado en el Problema 13.2?

SOLUCIÓN

La matriz experimental del experimento 2^3 factorial completo es la siguiente:

A	B	C
60	5	550
60	5	700
60	15	550
60	15	700
180	5	550
180	5	700
180	15	550
180	15	700

Un posible experimento factorial fraccional 2^{3-1} es:

A	B	C
60	5	550
60	15	700
180	5	700
180	15	550

Otro posible experimento, equivalente al anterior, es:

A	B	C
60	5	700
60	15	550
180	5	550
180	15	700

Un experimento factorial fraccional 2^{3-1}, del cual se obtiene el valor de la respuesta para 4 puntos experimentales, no permite calcular los 7 parámetros del modelo: constante, 3 efectos principales y 3 interacciones de 2 factores. Por ejemplo, sustituyendo las respuestas obtenidas en el primer diseño experimental en el modelo, se obtiene:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \beta_0 - \beta_A - \beta_B - \beta_C + \beta_{AB} + \beta_{AC} + \beta_{BC} \\
y_4 &= \beta_0 - \beta_A + \beta_B + \beta_C - \beta_{AB} - \beta_{AC} + \beta_{BC} \\
y_6 &= \beta_0 + \beta_A - \beta_B + \beta_C - \beta_{AB} + \beta_{AC} - \beta_{BC} \\
y_7 &= \beta_0 + \beta_A + \beta_B - \beta_C + \beta_{AB} - \beta_{AC} - \beta_{BC}
\end{aligned}$$

Sumando las 4 ecuaciones, puede obtenerse el valor de β_0: el valor medio de las 4 respuestas. Obsérvese, sin embargo que en las 4 ecuaciones β_A tiene signo opuesto a β_{BC}, con lo cual es posible calcular el valor de $\beta_A - \beta_{BC}$, pero no es posible calcular el valor de β_A y el de β_{BC}. Se dice que lo términos β_A y β_{BC} aparecen confundidos en el diseño. Análogamente, el término β_B está confundido con el término β_{AC}, y el término β_C está confundido con el término β_{AB}.

Existe la misma confusión entre los términos si se escoge el otro diseño experimental factorial fraccional:

$$\begin{aligned}
y_2 &= \beta_0 - \beta_A - \beta_B + \beta_C + \beta_{AB} - \beta_{AC} - \beta_{BC} \\
y_3 &= \beta_0 - \beta_A + \beta_B - \beta_C - \beta_{AB} + \beta_{AC} - \beta_{BC} \\
y_5 &= \beta_0 + \beta_A - \beta_B - \beta_C - \beta_{AB} - \beta_{AC} + \beta_{BC} \\
y_8 &= \beta_0 + \beta_A + \beta_B + \beta_C + \beta_{AB} + \beta_{AC} + \beta_{BC}
\end{aligned}$$

En las 4 ecuaciones, el término β_A tiene el mismo signo que β_{BC}, con lo cual es posible calcular $\beta_A + \beta_{BC}$, pero no es posible calcular el valor individual de cada uno de los términos.

Igualmente, β_B tiene el mismo signo en las 4 ecuaciones que β_{AC}, con lo que es posible calcular $\beta_B + \beta_{AC}$, pero no el valor de β_B o el valor de β_{AC}. Lo mismo sucede con los términos β_C y β_{AB}.

Problema 13.7

Se ha realizado un experimento factorial fraccional 2^{4-1}. La matriz experimental obtenida es la siguiente:

A	**B**	**C**	**D**	**S**
335	7.6	36	72	97.54
335	7.6	44	88	101.46
335	9.4	36	88	92.18
335	9.4	44	72	82.25
415	7.6	36	88	83.31
415	7.6	44	72	79.13
415	9.4	36	72	68.09
415	9.4	44	88	78.20

Ajuste un modelo compuesto por la suma de un término constante, los cuatro efectos principales y los 6 términos de interacción de los factores dos a dos. Es decir:

$$
\begin{aligned}
y_S &= \beta_0 \\
&+ \beta_A \cdot x_A + \beta_B \cdot x_B + \beta_C \cdot x_C + \beta_D \cdot x_D \\
&+ \beta_{AB} \cdot x_A \cdot x_B + \beta_{AC} \cdot x_A \cdot x_C + \beta_{AD} \cdot x_A \cdot x_D \\
&+ \beta_{BC} \cdot x_B \cdot x_C + \beta_{BD} \cdot x_B \cdot x_D + \beta_{CD} \cdot x_C \cdot x_D
\end{aligned}
$$

¿Pueden estimarse todos los términos del modelo?

SOLUCIÓN

Para calcular el valor de los coeficientes del modelo, puede establecerse el siguiente sistema de 8 ecuaciones con 11 incógnitas:

$$
\begin{aligned}
97.54 &= \beta_0 - \beta_A - \beta_B - \beta_C - \beta_D + \beta_{AB} + \beta_{AC} + \beta_{AD} + \beta_{BC} + \beta_{BD} + \beta_{CD} \\
101.46 &= \beta_0 - \beta_A - \beta_B + \beta_C + \beta_D + \beta_{AB} - \beta_{AC} - \beta_{AD} - \beta_{BC} - \beta_{BD} + \beta_{CD} \\
92.18 &= \beta_0 - \beta_A + \beta_B - \beta_C + \beta_D - \beta_{AB} + \beta_{AC} - \beta_{AD} - \beta_{BC} + \beta_{BD} - \beta_{CD} \\
82.25 &= \beta_0 - \beta_A + \beta_B + \beta_C - \beta_D - \beta_{AB} - \beta_{AC} + \beta_{AD} + \beta_{BC} - \beta_{BD} - \beta_{CD} \\
83.31 &= \beta_0 + \beta_A - \beta_B - \beta_C + \beta_D - \beta_{AB} - \beta_{AC} + \beta_{AD} + \beta_{BC} - \beta_{BD} - \beta_{CD} \\
79.13 &= \beta_0 + \beta_A - \beta_B + \beta_C - \beta_D - \beta_{AB} + \beta_{AC} - \beta_{AD} - \beta_{BC} + \beta_{BD} - \beta_{CD} \\
68.09 &= \beta_0 + \beta_A + \beta_B - \beta_C - \beta_D + \beta_{AB} - \beta_{AC} - \beta_{AD} - \beta_{BC} - \beta_{BD} + \beta_{CD} \\
78.20 &= \beta_0 + \beta_A + \beta_B + \beta_C + \beta_D + \beta_{AB} + \beta_{AC} + \beta_{AD} + \beta_{BC} + \beta_{BD} + \beta_{CD}
\end{aligned}
$$

Es posible calcular el término constante y los coeficientes de los cuatro efectos principales:

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{97.54+101.46+92.18+82.25+83.31+79.13+68.09+78.20}{8} = 85.27 \\
\beta_A &= \frac{-97.54-101.46-92.18-82.25+83.31+79.13+68.09+78.20}{8} = -16.18 \\
\beta_B &= \frac{-97.54-101.46+92.18+82.25-83.31-79.13+68.09+78.20}{8} = -10.18 \\
\beta_C &= \frac{-97.54+101.46-92.18+82.25-83.31+79.13-68.09+78.20}{8} = -0.02 \\
\beta_D &= \frac{-97.54+101.46+92.18-82.25+83.31-79.13-68.09+78.20}{8} = -7.04
\end{aligned}$$

Sin embargo, sólo puede resolverse la suma de los coeficientes de las interacciones de dos factores. Los coeficientes β_{AB} y β_{CD} tienen el mismo signo en todas las ecuaciones, con lo que sólo puede calcularse el valor de su suma: $\beta_{AB} + \beta_{CD}$. Lo mismo sucede con los coeficientes β_{AC} y β_{BD}, y con los coeficientes β_{AD} y β_{BC}.

Problema 13.8

Un estudio de optimización, con dos factores (A y B) y una respuesta (S), se realizó siguiendo la metodología de la superficie de respuesta, en particular un diseño central compuesto. En primer lugar se realizó un experimento factorial completo 2^2, con un punto central:

A	***B***
120	*20*
120	*30*
180	*20*
180	*30*
150	*25*

El punto central se añadió con el fin de analizar si la respuesta tenía curvatura. ¿Cómo puede analizarse gráficamente si la respuesta tiene curvatura?

En efecto, se comprobó que la curvatura de la respuesta era significativa. Por ello, para determinar el punto extremo (máximo o mínimo) de la respuesta, es necesario emplear un modelo con términos cuadráticos. Con este fin, se añadieron cuatro puntos experimentales adicionales, con lo que diseño completo quedó de la forma siguiente:

punto	***A***	***B***
1	*120*	*20*
2	*120*	*30*
3	*180*	*20*
4	*180*	*30*
5	*100*	*25*
6	*200*	*25*
7	*100*	*17*
8	*200*	*33*
9	*150*	*25*

Dibuje la región experimental del experimento. ¿Permite este diseño ajustar un modelo de segundo orden, que sea suma de un término constante, efectos principales (A, B), interacción ($A \cdot B$) y términos cuadráticos (A^2, B^2)? ¿Cómo puede estimarse el valor extremo de la respuesta usando este modelo?

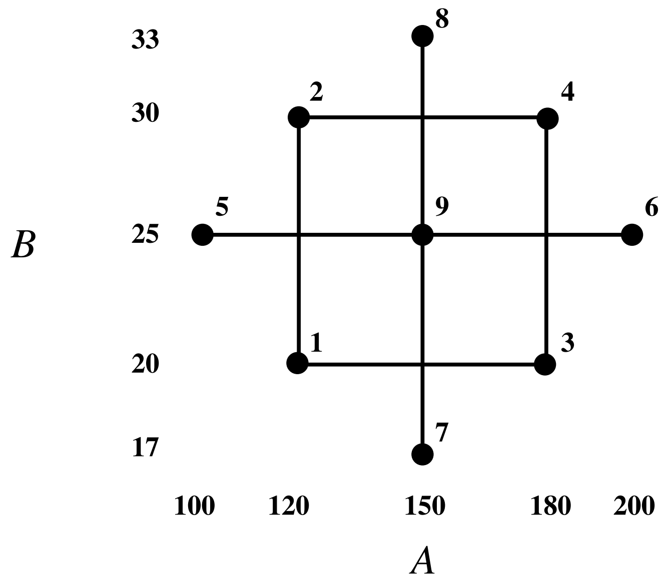


Figura 13.3: Región experimental del diseño central compuesto (Problema 13.8).

SOLUCIÓN

Un procedimiento gráfico para estudiar si la respuesta tiene curvatura consiste en dibujar, en las gráficas de los efectos principales, la respuesta en el punto central. La distancia existente entre este punto (respuesta en el punto central) y la línea (del efecto principal) da una medida de la curvatura de la respuesta.

Una vez comprobado mediante el procedimiento anterior que existe curvatura, se añaden 4 puntos experimentales adicionales con el fin de poder ajustar un modelo cuadrático. La región experimental del diseño completo se muestra en la Figura 13.3. Mediante el método de mínimos cuadrados, se puede ajustar el modelo siguiente a los puntos experimentales:

$$y_S = \beta_0 + \beta_A \cdot x_A + \beta_B \cdot x_B + \beta_{AB} \cdot x_A \cdot x_B + \gamma_A \cdot (x_A)^2 + \gamma_B \cdot (x_B)^2$$

Una vez ajustado el modelo, puede calcularse el valor extremo de la respuesta resolviendo el siguiente problema de puntos extremos: calcular los valores de x_A y de x_B que hacen mínimo (o máximo, según el caso) el valor de y_S en la región experimental.

Problema 13.9

Se ha realizado un experimento factorial completo 2^3, con dos réplicas del punto central. Se han medido tres respuestas: S_1, S_2 y S_3. La matriz experimental es la siguiente:

A	B	C	S_1	S_2	S_3
60	5	550	10.93	2710	11.7
60	5	700	10.19	3233	10.8
60	15	550	7.17	3021	9.0
60	15	700	6.94	3638	8.1
180	5	550	19.61	2903	13.0
180	5	700	17.50	3679	12.2
180	15	550	12.46	3029	10.3
180	15	700	11.77	3814	9.3
120	10	625	11.61	3378	10.3
120	10	625	11.17	3295	11.1

Analice gráficamente los resultados del experimento y extraiga conclusiones.

Problema 13.10

Se pretende estudiar el funcionamiento de un proceso de montaje de ventiladores de techo. Las piezas necesarias para montar el ventilador llegan en kits. El intervalo de tiempo entre la llegada de los kits está distribuido TRIA $(2, 5, 10)$ *(todos los tiempos están expresados en minutos). Hay 4 operarios encargados de realizar el ensamblaje de las piezas. Cuando se recibe un kit, éste es enviado automáticamente al primer operario de la línea de ensamblaje que se encuentra libre. El tiempo que tarda cada operario en montar el ventilador sigue la distribución siguiente:*

Operario	***Tiempo de ensamblaje***
1	*TRIA* $(15, 18, 20)$
2	*TRIA* $(16, 19, 22)$
3	*TRIA* $(16, 20, 24)$
4	*TRIA* $(17, 20, 23)$

Una vez montados, los ventiladores son revisados, encontrándose que el $7\,\%$ *de ellos están defectuosos. Un ventilador que está defectuoso es enviado de nuevo al operario que lo ha montado para que lo repare. Los ventiladores defectuosos tienen prioridad frente al montaje de nuevos ventiladores. Dado que para reparar el ventilador hay que desmontarlo y volverlo a montar, se supone que el tiempo de reparación es un* $30\,\%$ *mayor que el tiempo normal de ensamblaje. Simule el funcionamiento del sistema durante* 20000 *minutos y estime la utilización de cada operario y el tiempo de ciclo de las entidades.*

Suponga que puede contratar a un operario más, y que ese operario puede tener prestaciones idénticas a uno de los cuatro operarios ya existentes. ¿A cuál de ellos convendría escoger? Use PAN con 5 réplicas por escenario, y seleccione el escenario con un tiempo de ciclo menor. ¿Resulta sorprendente el resultado obtenido?

Suponga que es posible contratar hasta 5 nuevos operarios, y que cada uno de ellos puede tener prestaciones iguales a cualquiera de los 4 operarios existentes. Puede realizar la asignación como desee, incluyendo asignar los 5 nuevos empleados a un mismo operario. ¿Cuál es la mejor opción? Use OptQuest para buscar la colocación óptima para estos nuevos empleados (5 como máximo), con el objetivo de reducir el tiempo de ciclo.

Bibliografía

Banks, J., Carson, J. S. & Nelson, B. L. (1996), *Discrete-Event System Simulation*, Prentice-Hall.

Cellier, F. C. (1991), *Continuous System Modeling*, Springer-Verlag.

Hoover, S. V. & Perry, R. F. (1989), *Simulation. A Problem-Solving Approach*, Addison-Wesley Publishing.

Kelton, W. D., Sadowski, R. P. & Sadowski, D. A. (2002), *Simulation with Arena*, McGraw-Hill.

Kobayashi, H. (1978), *Modeling and Analysis: An Introduction to System Performance Evaluation Methodology*, Addison-Wesley Publishing Company.

Law, A. M. & Kelton, W. D. (2000), *Simulation Modeling and Analysis*, McGraw-Hill.

Ljung, L. & Torkel, G. (1994), *Modeling of Dynamic Systems*, Prentice-Hall.

Montgomery, D. C. (2001), *Design and Analysis of Experiments*, John Wiley & Sons.

Pedgen, C. D., Shannon, R. E. & Sadowsky, R. P. (1995), *Introduction to Simulation Using SIMAN*, McGraw-Hill.

Rockwell (2000*a*), *Arena Standard Edition. User's Guide*, Rockwell Software Inc.

Rockwell (2000*b*), *Arena Standard Edition. Variables Guide*, Rockwell Software Inc.